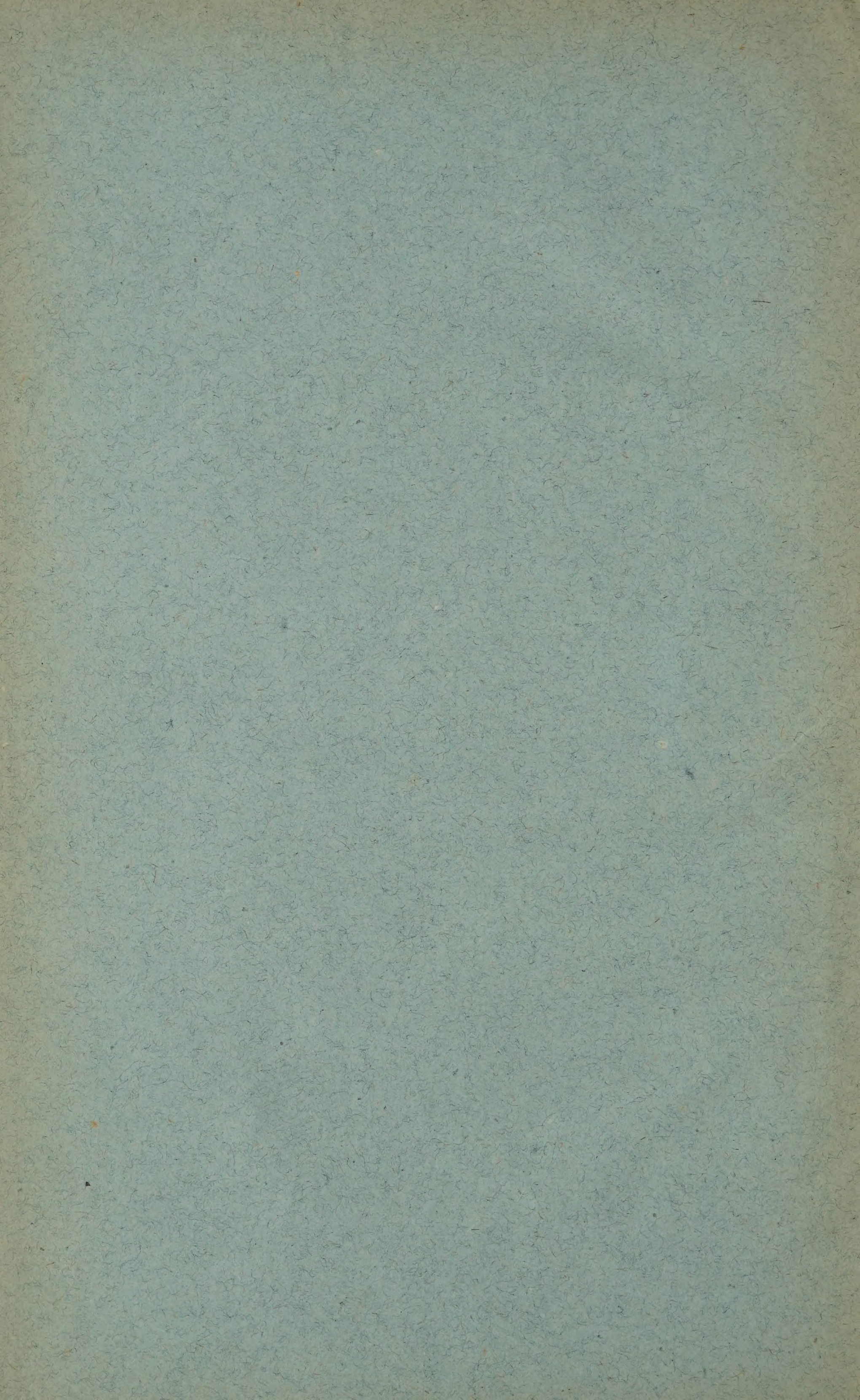
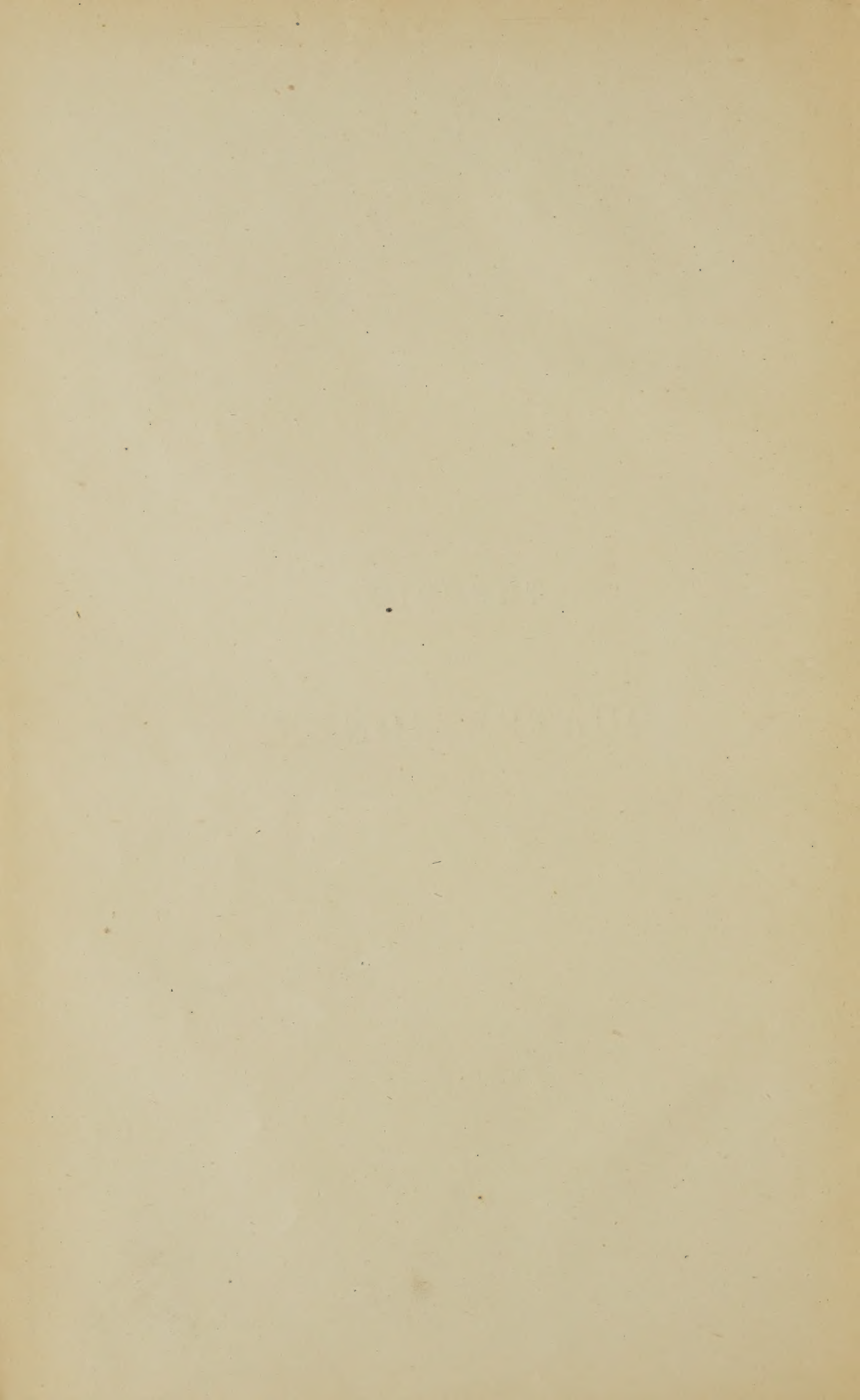




THEORIE

DER

QUATERNIONEN.



THEORIE

DER

QUATERNIONEN

VON

Pieter
DR. P. MOLENBROEK.

LEIDEN,
DRUCK UND VERLAG VON E. J. BRILL.
1891.

DRUCK VON E. J. BRILL, LEIDEN.

VORWORT.

Indem ich hierbei eine neue Theorie der Quaternionen der Öffentlichkeit übergebe, spreche ich zugleich die Ansicht aus, dass ich durch diese Arbeit einem wirklichen Bedürfnis entgegen komme. Wohl stehen denjenigen, welche dieses neue mathematische Hülfsmittel studiren wollen, die ausgezeichneten Arbeiten des groszen englischen Mathematikers, welcher die Quaternionen zuerst einführte und deren Anwendung zeigte, zu Gebote. Allein die beiden Werke, in denen HAMILTON seine Theorie ausführlich dargelegt hat, sind des hohen Preises wegen, nur im Bereiche wissenschaftlicher Gesellschaften und einzelner Studirenden.

Seit einigen Jahren ist nun zwar eine deutsche Übersetzung der HAMILTON'schen »Elements'' erschienen, welche diesem Mangel abhelfen sollte; ich glaube jedoch, dass der Umfang des den theoretischen Teil erörternden Bandes zumeist davon abschrecken wird, die Theorie der Anwendungen wegen zu studiren. Es gerät deshalb die genannte Arbeit nur in die Hände derjenigen, welche ein specielleres Studium beabsichtigen. Die Andren greifen zu einem weniger ausführlichen Werke und in dieser Hinsicht ist gewiss wohl »An elementary treatise on quaternions'' von Prof. TAIT als das wichtigste zu bezeichnen.

Es will mir jedoch scheinen, dass diese Arbeit des nam-

haften englischen Physikers nicht den beabsichtigten Zweck erreichen lässt und ich neige zur Ansicht, dies finde hauptsächlich seinen Grund darin, dass die Theorie der Quaternionen in dem TAIT'schen Buche nur dürftig berücksichtigt worden ist. Zahlreich sind die Schwierigkeiten, welche mit der Theorie verknüpft sind, die HAMILTON jedoch glänzend zu überwinden gewuszt hat, und es ist notwendig, dieselben ganz beseitigt zu haben, bevor man zu den Anwendungen schreitet, weil sonst das Vertrauen auf die erhaltenen Resultate zweifelhafter Natur ist.

Ich habe deshalb unternommen an der Hand HAMILTON's eine ganz einheitliche Theorie aufzubauen und die wichtigeren Begriffe und Formeln in einfacher Weise aufzuklären. Ob dasselbe mir gelungen ist, sei Andrer Urteil überlassen. Nur möge in Betreff des gewählten Stoffes noch Folgendes bemerkt werden.

Ich meine einerseits behaupten zu können, dass die wichtigeren theoretischen Untersuchungen HAMILTON's sämtlich in dem vorliegenden Bande enthalten sind. Andrerseits aber beanspruche ich die Priorität der Mitteilung einiger hier sich vorfindenden Resultate. Es sind dieselben hauptsächlich in den Artikeln 18—21, 78, 97—107 enthalten, welche die Wirkung des Symbols $\sqrt{-1}$ an einen Vektor und an einen Quaternion deuten und wobei meiner Meinung nach der Skalarcharakter des Symbols $\sqrt{-1}$ zuerst deutlich zu Tage tritt.

Bekanntlich hat CLIFFORD in seinen »Mathematical Papers" eine Deutung der Biquaternionen veröffentlicht. Ich bin jedoch der Ansicht, dass dieselbe in dem Systeme der Quaternionen, wie dasselbe von HAMILTON aufgebaut worden ist, keinen Platz finden kann.

Durch die von mir gegebene Deutung ist nicht nur eine geometrische Erläuterung der HAMILTON'schen Bivektoren und Biquaternionen gewonnen, sondern es wird dadurch zugleich

der Begriff der aus der analytischen Geometrie stammenden imaginären Punkte geometrisch interpretirt.

Dadurch wird weiter auch noch ermöglicht mit denjenigen analytischen Gleichungen, welche complexe Coefficienten enthalten, eine bestimmte geometrische Darstellung zu verknüpfen, wodurch ein Teil meiner Arbeit den in der letzteren Zeit von Hrn Tarry veröffentlichten Untersuchungen auf dem Gebiete der »géométrie générale" sich anschlieszt.

Bei der Auflösung der Quaterniongleichungen hat ebenfalls, wie ich meine, manche bisher unerwähnte Frage Erledigung gefunden.

Schlieszlich sei noch mitgeteilt, dass ich die Absicht habe der jetzt veröffentlichen Theorie möglichst bald eine systematisch geordnete Darstellung der Anwendungen folgen zu lassen.

P. MOLENBROEK.

Amersfort, im Mai 1891.



INHALTSVERZEICHNIS.

ERSTER ABSCHNITT.

SUMMEN UND DIFFERENZEN VON VEKTOREN.

ZWEITER ABSCHNITT.

QUOTIENTEN VON VEKTOREN. QUATERNIONEN.

DRITTER ABSCHNITT.

PRODUKTE VON VEKTOREN.

VIERTER ABSCHNITT.

EINIGE GEOMETRISCHEN ÖRTER.

FÜNFTER ABSCHNITT.

DIFFERENTIALE VON QUATERNIONEN.

SECHSTER ABSCHNITT.

AUFLÖSUNG VON QUATERNIONGLEICHUNGEN ERSTEN GRADES.

SIEBENTER ABSCHNITT.

QUATERNIONGLEICHUNGEN ZWEITEN UND HÖHEREN GRADES.

ANHANG.

SUMMEN UND DIFFERENZEN

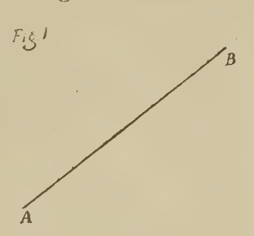
VON

VEKTOREN.

---

1. Wenn eine gerade Linie im Raume betrachtet wird, in Hinsicht nicht nur auf ihre Grösze, sondern auch auf ihre Richtung, so nennt man dieselbe einen Vektor.

Man bezeichnet einen Vektor durch die Angabe zweier den beiden Endpunkten hinzugefügten Buchstaben, z. B. AB ist der Vektor, welcher den Punkt A mit dem Punkte B verbindet. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Richtung des Vektors von dem zuerst angegebenen Punkte gegen den zuletzt geschriebenen verläuft.



Dementsprechend wird der mit dem zuerst geschriebenen Buchstaben bezeichnete Punkt Anfangspunkt des Vektors, der mit dem nachher geschriebenen Buchstaben bezeichnete Punkt Endpunkt des Vektors genannt.

Der Vektor AB ist deshalb verschieden von BA, indem die Gröszen derselben übereinstimmen, die Richtungen jedoch einander entgegengesetzt sind.

Der Kürze halber wollen wir im Folgenden die Vektoren mehrmals mit den griechischen Buchstaben α, β, γ ..... bezeichnen.

2. Man nennt zwei Vektoren einander gleich, wenn sie sowohl hinsichtlich der Grösze als der Richtung übereinstimmen, oder kürzer:

Zwei Vektoren sind einander gleich, wenn sie parallel und an Länge einander gleich sind.

Ungleiche Vektoren sind an Grösze, oder an Richtung, oder an diesen beiden zusammen verschieden.

3. Als Grundsätze betrachten wir:

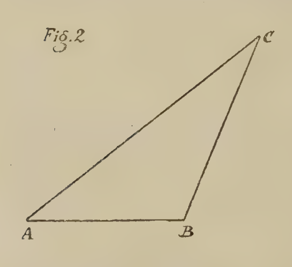
1⁰. Wenn jeder von zwei Vektoren einem dritten gleich ist, so sind die beiden ersteren einander gleich.

2⁰. Das Resultat mehrerer Operationen, welche man an einem Vektor oder an mehreren Vektoren vollzieht, kann nicht beeinfluszt werden dadurch, dass man einige der Vektoren durch andere, welche den gewählten gleich sind, ersetzt.

4. Ein Vektor, welcher dieselbe Richtung hat wie ein gegebener Vektor α, und dessen Länge der Längeneinheit gleich kommt, wird Einheitsvektor der Richtung α genannt und mit $U\alpha$ bezeichnet.

5. Die Vergleichung von Vektoren derselben Richtung ist Gegenstand der Arithmetik und führt zu den arithmethischen Zahlen; dieselben nehmen nur auf die Grösze Bezug.

Gröszen, bei denen keine Richtung in Betracht kommt, werden im Gegensatze zu den Vektoren, Skalargröszen genannt. Die arithmetischen Zahlen heiszen auch kurzweg Skalare.



6. Wenn man von dem Endpunkte B eines Vektors AB aus einen neuen Vektor BC, welcher mit AB gleiche oder von ihm verschiedene Richtung hat, abträgt, so nennt man den Vektor AC die Summe der beiden Vektoren AB und BC, und sagt, dass BC zu AB addirt ist [1]).

1) Wir lenken besonders die Aufmerksamkeit darauf, dass die Terminologie der Vektorenrechnung mit derjenigen des gewöhnlichen Calcüls ganz übereinstimmt, obgleich der damit in der neuen Wissenschaft verbundene Begriff im allgemeinen beträchtlich von dem üblichen abweicht, wodurch mancher Satz der Algebra eine Abänderung erfährt. Der Studirende möge dies, damit mancher Irrtum ihm erspart werde, bei jeder neu eingeführten Operation beachten.

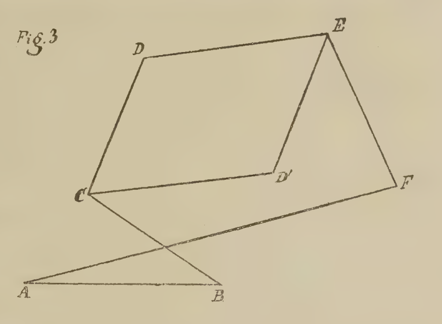
Trägt man von C aus einen dritten Vektor CD ab, so heiszt AD die Summe der drei Vektoren AB, BC, CD. Man schreibt diese beiden Definitionen in Zeichen wie nachstehend:

$$AC = AB + BC, \quad AD = AB + BC + CD.$$

7. Die Summe zweier oder mehrerer Vektoren ist in Bezug auf ihre Glieder commutativ und associativ, oder wie man auch zu sagen pflegt:

Die Addition von Vektoren ist eine commutative und associative Operation.

Man versteht unter dem ersteren Ausdrucke, dass die Reihenfolge der einzelnen Glieder der Summe das Resultat nicht beeinträchtigt. Der Satz ist offenbar bewiesen, wenn nur gezeigt wird, dass zwei aufeinanderfolgende Glieder der Summe mit einander verwechselt werden können.



Es sei in der Figur 3 $AB = \alpha$, $BC = \beta$, $CD = \gamma$, $DE = \delta$, $EF = \varepsilon$. Zieht man CD′ =// DE (d. h. der Geraden DE parallel und gleich), so ist nach einem bekannten Satze der Planimetrie auch D′E =// CD. Man hat deshalb $CD' = \delta$, $D'E = \gamma$. Es ist weiter

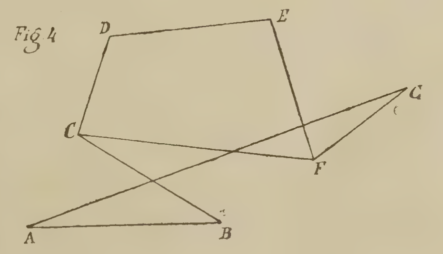
$AF = AB + BC + CD + DE + EF$ und $AF = AB + BC + CD' + D'E + EF$ und dadurch auch

$$AB + BC + CD + DE + EF = AB + BC + CD' + D'E + EF$$

oder

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + \delta + \gamma + \varepsilon \quad \ldots \quad (a.\ 1)$$

Die Aussage, dass die Addition associativ ist, bedeutet, dass man zwei oder mehrere willkürlich gewählte Glieder der Summe durch ihre Summe ersetzen kann.



In der Figur 4 sei wieder

$AB = \alpha$, $BC = \beta$, $CD = \gamma$, $DE = \delta$, $EF = \varepsilon$, $FG = \zeta$. Es ist sodann

$$AG = AB + BC + CD + DE + EF + FG$$

und

$$AG = AB + BC + CF + FG,$$

mithin

$$AB + BC + CD + DE + EF + FG = AB + BC + CF + FG.$$

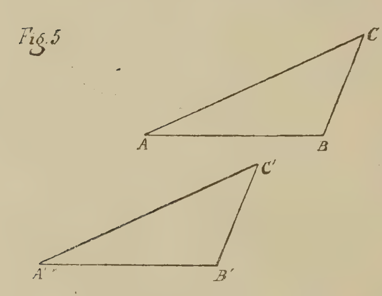
In der zweiten Seite dieser Gleichung wird

$$CF = CD + DE + EF = \gamma + \delta + \varepsilon$$

als ein einziger Vektor betrachtet. Bezeichnen wir dies wie in der Arithmetik durch Hinzufügung von Klammern, so wird

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta = \alpha + \beta + (\gamma + \delta + \varepsilon) + \zeta \quad . \; . \quad (a.\ 2)$$

Als dritter Satz der Addition kann der nachfolgende gelten: Wenn zwei Vektoren gleich sind, so sind ihre Summen mit zwei anderen gleichen Vektoren auch einander gleich. Der Satz kann als unmittelbare Folge des zweiten Grundsatzes betrachtet, oder auch mit Hülfe der Figur 5 bewiesen werden.



Es sei $AB =// A'B'$, $BC =// B'C'$. Hieraus schlieszt man $AA' =// BB'$ und $BB' =// CC'$, woraus $AA' =// CC'$ folgt, und deshalb $AC =// A'C'$. Die Gleichung

$$AC = A'C'$$

kann auch geschrieben werden

$$AB + BC = A'B' + B'C'$$

8. Wie in der Arithmetik wollen wir anstatt

$$\alpha + \alpha + \alpha + \ldots\ldots + \alpha$$

kurz $m\alpha$ schreiben; m soll hierbei eine ganze arithmetische Zahl heiszen.

Der Vektor α heiszt dadurch mit m multiplicirt. Bisweilen sagt man auch, der Vektor α könne m-mal auf den Vektor $m\alpha$ abgetragen werden.

Wenn n ebenfalls eine ganze Zahl bedeutet, so sei unter $\alpha : n$, oder $\frac{1}{n}\alpha$, ein Vektor verstanden, der mit n multiplicirt,

α ergibt. Man sagt in diesem Falle, der Vektor α sei durch n dividirt, und der Vektor $\alpha : n$ oder $\frac{1}{n}\alpha$ sei der n^{te} Theil von α.

Unter $\frac{m}{n}\alpha$ endlich sei $m(\alpha : n)$ oder $m\left(\frac{1}{n}\alpha\right)$ verstanden. $\frac{m}{n}$ kann hierin ein willkürlicher echter oder unechter Bruch heiszen.

Aus diesen Definitionen erhellt unmittelbar, dass die Vektoren $m\alpha$, $\alpha : n$, $\frac{m}{n}\alpha$ mit α dieselbe Richtung haben und nur an Grösze von demselben verschieden sind. Die arithmetischen Zahlen m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$, welche die Beziehung der Grösze der Vektoren $m\alpha$, $\frac{1}{n}\alpha$, $\frac{m}{n}\alpha$ zu derjenigen des Vektors α ausdrücken, werden hier auch das Verhältnis der Vektoren $m\alpha$, $\frac{1}{n}\alpha$, $\frac{m}{n}\alpha$ bzhw. zum Vektor α genannt.

Wenn zwei Vektoren gleicher Richtung α und β derart sind, dass kein einziger Vektor derselben Richtung gefunden werden kann, der auf beide Vektoren eine ganze Anzahl Male abgetragen werden kann, so heiszen die Vektoren α und β incommensurabel. In diesem Falle kann man α erst möglichst viele Male auf β abtragen; auf den Rest trage man $\frac{1}{10}\alpha$ möglichst viele Male ab, u. s. w. Dadurch gelangt man zu einem Ausdruck von der Form $\beta = x\alpha$, wo x ein incommensurabler Skalar ist. x heiszt wieder das Verhältnis der Vektoren β und α.

9. Wenn man in diesem Sinne das Verhältnis des Vektors α zum Einheitsvektor derselben Richtung $U\alpha$ bestimmt, so wird das Resultat der Tensor des Vektors α genannt. Derselbe ist stets eine arithmetische Zahl.

Das Zeichen für den Tensor des Vektors α ist $T\alpha$. Man hat demnach die Gleichung

$$\alpha = T\alpha\, U\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 3)$$

Unmittelbar leuchtet die Richtigkeit der nachstehenden Relationen ein

$$Tx\alpha = x\, T\alpha, \quad Ux\alpha = U\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 4)$$

wo x eine willkürliche arithmetische Zahl ist.

Wenn zwei Vektoren α und β einander gleich sind, so müssen ihre Tensoren und auch ihre Einheitsvektoren gleich sein. Das Letztere findet statt, weil die Richtungen der Vektoren, das Erstere weil ihre Längen übereinstimmen.

Umgekehrt lässt sich aus $T\alpha = T\beta$, $U\alpha = U\beta$ schlieszen, dass $\alpha = \beta$, weil die beiden Gleichungen aussagen, dass Länge und Richtung gleich sind.

10. Man kann demnach einen einem Vektor hinzugefügten Skalarcoefficienten als ein Operationszeichen oder einen Operator betrachten, an den Vektor wirkend, indem derselbe die Richtung des Vektors ungeändert lässt, den Tensor jedoch vergrössert oder verkleinert.

Wie aus dem zweiten Abschnitt ersichtlich wird, ermöglicht diese Deutung eines Skalarcoefficienten denselben als einen besonderen Fall eines Quaternions zu betrachten; sie ist deshalb von grosser Wichtigkeit für unsre Theorie.

11. Anstatt $x(y\alpha)$, eines Ausdrucks, welcher bedeutet, dass der Skalar x an den Vektor $y\alpha$ wirkt, wollen wir einfacher schreiben $xy\alpha$. Man sagt in diesem Falle auch, das Symbol xy wirke an den Vektor α, und setzt daher bisweilen statt $xy\alpha$ das nachfolgende $(xy)\alpha$. In dieser Weise wird

$$x(y\alpha) = xy\alpha = (xy)\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a. 5)$$

Wie in der Arithmetik beweist man, dass

$$x(ya) = y(x\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a. 6)$$

oder symbolisch

$$xy = yx \text{ oder } (xy) = (yx) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a. 7)$$

Weil $z\alpha$ ein Vektor bedeutet, so ist weiter auch

$$\left.\begin{array}{l} xyz\alpha = (xy)z\alpha = (yx)z\alpha = yxz\alpha \\ \text{und} \\ xyz\alpha = x(yz)\alpha = x(zy)\alpha = xyz\alpha \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (a. 8)$$

Den Ausdruck $(x + y)\alpha$ wollen wir als gleichbedeutend annehmen mit $x\alpha + y\alpha$, oder

$$(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha$$

und allgemeiner

$$(x + y + z)\alpha = x\alpha + y\alpha + z\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a. 9)$$

Es sind diese Gleichungen als die Definition der Summe der Zahlen x, y oder x, y, z zu betrachten.

Weil aber

$$(x+y+z)\alpha = x\alpha + y\alpha + z\alpha =$$
$$= x\alpha + z\alpha + y\alpha \text{ nach } (a.\ 1) =$$
$$= (x+z+y)\alpha \text{ nach } (a.\ 9)$$

so schlieszt man, dass wie in der Arithmetik

$$(x+y+z)\,\alpha = (x+z+y)\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad (a.\ 9^*)$$

oder symbolisch

$$x+y+z = x+z+y$$

und ebenso, weil

$$x\alpha + y\alpha + za = x\alpha + (y\alpha + z\alpha) \text{ nach } (a.\ 2) =$$
$$= x\alpha + (y+z)\alpha \text{ nach } (a.\ 9) =$$
$$= \{x + (y+z)\}\alpha \text{ nach } (a.\ 9),$$

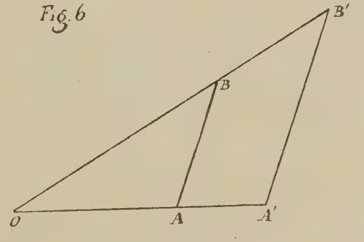
schlieszt man dass auch

$$x\alpha + y\alpha + z\alpha = \{x + (y+z)\}\alpha \quad \ldots\ldots \quad (a.\ 9^{**})$$

oder symbolisch

$$x+y+z = x+(y+z).$$

Mit Hülfe der Figur 6 ist es ein Leichtes die Gültigkeit des durch die Gleichung (*a.* 10) ausgesprochenen Satzes darzuthun.



$$x\alpha + x\beta = x(\alpha+\beta) \quad . \quad (a.\ 10)$$

Es sei

$$\text{OA} = \alpha, \quad \text{AB} = \beta,$$
$$\text{OA}' = x\alpha, \quad \text{A}'\text{B}' = x\beta,$$

wodurch zugleich ausgesprochen wird, dass A′B′ // AB.

Zieht man noch OB und OB′, so ist △ OAB = △ OA′B′, weil $\frac{T.\text{OA}'}{T.\text{OA}} = \frac{T.\text{A}'\text{B}'}{T.\text{AB}} = x$ und ∠ OAB = ∠ OA′B′. Hieraus schlieszt man

$$\frac{\text{OB}'}{\text{OB}} = \frac{\text{OA}'}{\text{OA}} = x \text{ und } \angle\,\text{BOA} = \angle\,\text{B}'\text{OA}',$$

sodass OB und OB′ der Richtung nach zusammenfallen. Es ist deshalb

$$\text{OB}' = x\,.\,\text{OB} \text{ oder } \text{OA}' + \text{A}'\text{B}' = x\,.\,\text{AB}$$

oder schlieszlich

$$x\alpha + x\beta = x(\alpha+\beta).$$

Als Grenzfall lässt sich der Fall betrachten, wo β mit α gleiche Richtung hat. Es wird dadurch

$$x\alpha + xa\alpha = x(\alpha + a\alpha)$$

und allgemeiner

$$xa\alpha + xb\alpha = x(a\alpha + b\alpha).$$

12. Wenn ein Vektor gezeichnet wird, welcher die nämliche Grösze wie α aber eine der Richtung jenes Vektors entgegengesetzte Richtung hat, so wollen wir denselben mit $-\alpha$ bezeichnen und den negativen Vektor des Vektors α nennen.

Wird α durch AB dargestellt, so ist BA eine Veranschaulichung von $-\alpha$.

Aus der Definition folgt sogleich, dass der Negative eines negativen Vektors der ursprüngliche Vektor ist, oder in Zeichen

$$-(-\alpha) = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 11)$$

Weiter erhellt auch unmittelbar aus der Definition, dass

$$T(-\alpha) = T\alpha,\ U(-\alpha) = -U\alpha \quad \ldots\ldots \quad (a.\ 12)$$

Man kann deshalb wieder das Zeichen — vor einem Vektor als einen Operator betrachten, welcher dessen Tensor ungeändert lässt, die Richtung des Vektors jedoch umkehrt.

Die Addition der beiden Vektoren AB und BA führt zum Anfangspunkte A zurück. Demnach schreiben wir

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BA} = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha + (-\alpha) = 0 \ \ldots \quad (a.\ 13)$$

Wenn zwei Vektoren gleich sind, so ist einleuchtend, dass ihre Negativen auch einander gleich sein müssen.

Unter $-(\alpha + \beta + \ldots\ldots)$ sei der Negative des Vektors $(\alpha + \beta + \ldots\ldots)$, unter $-x\alpha$ der Negative des Vektors $x\alpha$ verstanden.

13. Anstatt zu schreiben $\alpha + (-\beta)$ wird einfacher geschrieben $\alpha - \beta$, und man sagt sodann, dass der Vektor β von α subtrahirt wird. α heiszt Minuendus, β Subtrahendus und das Resultat, d. h. die Summe der Vektoren α und $-\beta$, wird die Differenz der Vektoren α und β genannt.

Nach dieser Definition der Subtraction gilt die nachstehende Gleichung

$$\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 14)$$

14. Als erster Satz der Subtraction ergibt sich:

Die Differenz zweier Vektoren α und β ist ein Vektor derart, dass β zu demselben addirt, α als Summe ergibt.

Denn es ist

$$\begin{aligned}\alpha - \beta + \beta &= \alpha + (-\beta) + \beta, \text{ nach } (a.\,14)\\ &= \alpha + [(-\beta) + \beta], \text{ nach } (a.\,2)\\ &= \alpha, \text{ nach } (a.\,13).\end{aligned}$$

Ein zweiter Satz lautet: Wenn zwei Vektoren gleich sind, so sind ihre Differenzen mit gleichen Vektoren auch einander gleich.

Denn die Negativen gleicher Vektoren sind einander gleich, und die Summen der gegebenen Vektoren mit diesen Negativen können nach einem Satze der Addition nicht verschieden sein.

Aus dem ersten Satze folgt noch, dass wenn

$$AC = AB + BC,$$

auch

$$AB = AC - BC$$

und

$$BC = AC - AB$$

sein muss.

Wenn verschiedene Operationen (Additionen und Subtractionen) nach einander ausgeführt werden sollen, so kann die Reihenfolge willkürlich geändert werden. Man hat nämlich die nachfolgenden Transformationen:

$$\begin{aligned}\alpha - \beta + \gamma + \delta - \varepsilon &= \alpha + (-\beta) + \gamma + \delta + (-\varepsilon), \text{ nach } (a.\,14)\\ &= \alpha + \gamma + (-\varepsilon) + \delta + (-\beta), \text{ nach } (a.\,1)\end{aligned}$$

und deshalb

$$\alpha - \beta + \gamma + \delta - \varepsilon = \alpha + \gamma - \varepsilon + \delta - \beta, \text{ nach } (a.\,14) \;.\;. \quad (a.\,15)$$

In gleicher Weise kann bewiesen werden

$$\alpha - \beta = -\beta + \alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (a.\,16)$$

Mit Hülfe der Figur 7 gelingt es weiter leicht den nachstehenden Satz zu beweisen.

Fig. 7

A B C

$$-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta \;. \quad (a.\,17)$$

Es sei $AB = \alpha$, $BC = \beta$, so ist $AC = \alpha + \beta$ und $CA = -(\alpha + \beta)$.

Man hat jedoch auch

$$\begin{aligned}CA = CB + BA &= -\beta - \alpha =\\ &= -\alpha - \beta, \text{ nach } (a.\,16)\end{aligned}$$

und somit durch Verbindung der beiden Werte von CA

$$-(\alpha+\beta)=-\alpha-\beta.$$

Mit geringer Mühe lässt dieser Satz sich verallgemeinern z. B.

1°. $-(\alpha+\beta+\gamma)=-[(\alpha+\beta)+\gamma]=$
$=-(\alpha+\beta)-\gamma$ nach $(a.\ 17)$
$=-\alpha-\beta-\gamma.$

2°. $-(\alpha-\beta-\gamma+\delta)=-[\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+\delta]$, nach $(a.\ 14)$
$=-\alpha-(-\beta)-(-\gamma)-\delta$, nach $(a.\ 17)$
$=-\alpha+\{-(-\beta)\}+\{-(-\gamma)\}-\delta$,
nach $(a.\ 14)$

oder schlieszlich

$$-(\alpha-\beta-\gamma+\delta)=-\alpha+\beta+\gamma-\delta, \text{ nach } (a.\ 11) \quad . \quad (a.\ 18)$$

Sehen wir weiter zu, wie das associative Princip sich hier gestaltet. Dasselbe wird durch die beiden nachfolgenden Beispiele erläutert, und man ersieht daraus, dass die Anwendung des Princips auf dieselbe Weise stattfindet, wie in der Arithmetik.

1°. $\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)+\varepsilon$, nach $(a.\ 14)$
$=\alpha+[\beta+(-\gamma)+(-\delta)+\varepsilon]$, nach $(a.\ 2)$

oder

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon=\alpha+[\beta-\gamma-\delta+\varepsilon], \text{ nach } (a.\ 14) \ . \ . \ . \ (a.\ 19)$$

2°. $\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)+\varepsilon$, nach $(a.\ 14)$
$=\alpha+\beta+[(-\gamma)+(-\delta)+\varepsilon]$, nach $(a.\ 2)$
$=\alpha+\beta+(-\gamma-\delta+\varepsilon)$, nach $(a.\ 14)$
$=\alpha+\beta+[-(\gamma+\delta-\varepsilon)]$, nach $(a.\ 18)$

oder schlieszlich

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon=\alpha+\beta-(\gamma+\delta-\varepsilon), \text{ nach } (a.\ 14) \ . \ . \ . \ (a.\ 20)$$

15. Wir wenden uns jetzt einigen Sätzen anderer Art zu, ausgesprochen durch die Gleichungen $(a.\ 21)$, $(a.\ 22)$, $(a.\ 24)$, und $(a.\ 25)$.

1°. $$a(-\beta)=-a\beta \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (a.\ 21)$$

wenn a ein Skalar ist. Denn es ist

$T.a(-\beta)=a\,T(-\beta)$, nach $(a.\ 4)=a\,T\beta$, nach $(a.\ 12)$
$U.a(-\beta)=U(-\beta)$, nach $(a.\ 4)=-U\beta$, nach $(a.\ 12)$
$T(-a\beta)=Ta\beta$, nach $(a.\ 12)=a\,T\beta$, nach $(a.\ 4)$
$U(-a\beta)=-Ua\beta$, nach $(a.\ 12)=-U\beta$, nach $(a.\ 4)$.

Tensor und Einheitsvektor stimmen, wie man hieraus er-

sieht, bei $a(-\beta)$ und $-a\beta$ überein, woraus die Gleichheit der Vektoren $a(-\beta)$ und $-a\beta$ unmittelbar folgt.

2⁰. $$a(\alpha-\beta-\gamma+\delta)=a\alpha-a\beta-a\gamma+a\delta \quad . \; . \; (a.\,22)$$

Denn es wird

$$\begin{aligned} a(\alpha-\beta-\gamma+\delta) &= a[\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+\delta], \text{ nach } (a.\,14)\\ &= a\alpha+a(-\beta)+a(-\gamma)+a\delta, \text{ nach } (a.\,10)\\ &= a\alpha+(-a\beta)+(-a\gamma)+a\delta, \text{ nach } (a.\,21)\\ &= a\alpha-a\beta-a\gamma+a\delta, \text{ nach } (a.\,14). \end{aligned}$$

Wie bei der Addition wollen wir den Ausdruck $(a-b)\alpha$ als gleichbedeutend annehmen mit $a\alpha-b\alpha$, also

$$(a-b)\alpha=a\alpha-b\alpha,$$

eine Gleichung, welche vorläufig nur einen Sinn hat für $a>b$.

Und diese Schreibweise verallgemeinern wir zur nachstehenden

$$(a-b+c-d)\alpha=a\alpha-b\alpha+c\alpha-d\alpha \quad . \; . \; . \; (a.\,23)$$

Auch diese Gleichung hat vorläufig nur einen Sinn, falls $a>b$ und $a-b+c>d$.

Es ist weiter

3⁰. $$x\alpha-x\beta=x(\alpha-\beta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a.\,24)$$

weil

$$\begin{aligned} x\alpha-x\beta &= x\alpha+(-x\beta), \text{ nach } (a.\,14)\\ &= x\alpha+x(-\beta), \text{ nach } (a.\,21)\\ &= x[\alpha+(-\beta)], \text{ nach } (a.\,10)\\ &= x(\alpha-\beta), \text{ nach } (a.\,14). \end{aligned}$$

Eine Folge dieser Gleichung und der Gleichung $(a.\,20)$ ist:

4⁰. $$x(a-b+c-d)\alpha=(xa-xb+xc-xd)\alpha. \quad . \; . \; (a.\,25)$$

Denn nach $(a.\,23)$ ist

$$\begin{aligned} x(a-b+c-d)\alpha &= x(a\alpha-b\alpha+c\alpha-d\alpha)\\ &= xa\alpha-xb\alpha+xc\alpha-xd\alpha, \text{ nach } (a.\,24)\\ &= (xa-xb+xc-xd)\alpha, \text{ nach } (a.\,23). \end{aligned}$$

Für das Symbol $x(a-b+c-d)$ gilt demnach wie in der Arithmetik die Formel

$$x(a-b+c-d)=xa-xb+xc-xd.$$

16. Bisher definirten wir nur noch die arithmetischen Zahlen als Symbole, welche die Länge eines Vektors ändern.

Wenn nun y eine solche Grösze ist, so kann man stets den Vektor $-y\alpha$ denken.

Man pflegt hiebei auch zu sagen, das Symbol oder die

algebraische negative Zahl $(-y)$ operire an den Vektor α, sodass nach dieser Redensart

$$(-y)\,\alpha = -y\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 26)$$

Diese Gleichung ist als Definition der negativen Zahlen zu betrachten; man kann eine solche Zahl auch mit einem einzigen Symbole z. B. x bezeichnen, womit $x = -y$ gemeint ist. y wird sodann der absolute oder der numerische Wert der negativen Zahl genannt.

Bei dieser Voraussetzung gelten, wie unmittelbar ersichtlich, die Relationen:

$$Txa = yT\alpha,\ U x\alpha = -U\alpha \text{ (wenn } x = -y) \quad . . \quad (a.\ 27)$$

Der negative Skalar x vor einem Vektor kann, wie wir hieraus entnehmen, als ein Operator betrachtet werden, welcher den Tensor des Vektors verkleinert oder vergröszert nach dem Masstabe des numerischen Wertes des Skalarcoefficienten und welcher zugleich die Richtung des Vektors entgegengesetzt macht.

Es behält nunmehr die Gleichung

$$a\alpha - b\alpha = (a - b)\,\alpha$$

auch einen Sinn in dem Falle, wo a und b arithmetische Zahlen sind, und $b > a$. Denn es ist sodann die zweite Seite jener Gleichung gleichbedeutend mit $-(b - a)\,\alpha$. Der Beweis kann leicht gegeben werden wie folgt:

$$\begin{aligned}(a - b)\,\alpha = a\alpha - b\alpha &= \\ &= -b\alpha + a\alpha, \text{ nach } (a.\ 16) = \\ &= -(b\alpha - a\alpha), \text{ nach } (a.\ 18) = \\ &= -(b - a)\,\alpha, \text{ nach } (a.\ 23).\end{aligned}$$

Weil $x\alpha$ auch bei negativem x ein Vektor ist, so behalten das distributive und das associative Princip der Addition und Subtraction, wenn Glieder von der Form $x\alpha$ dabei vorkommen, ihre Gültigkeit.

Man weist weiter leicht nach, dass auch die Gleichungen (a. 7), (a. 8), (a. 10), (a. 21), (a. 22), (a. 24), (a. 25), bei negativen Skalaren richtig bleiben. Man kann zu dem Zwecke stets x durch $-y$ ersetzen. Indessen überlassen wir dies dem Studirenden.

17. Wenn ein Vektor $xx\alpha$ construirt wird, so wollen wir

denselben kürzer mit $x^2\alpha$ bezeichnen. Indem man noch setzt

$$x^2\alpha = y\alpha,$$

wird die Identität der Symbole x^2 und y angenommen und man pflegt zu sagen: die Zahl x mit zwei potenzirt, ergebe y, oder y sei die zweite Potenz von x.

Umgekehrt, wenn man setzt

$$x^2\alpha \text{ oder } xx\alpha = y\alpha,$$

so bezeichnet man den Vektor $x\alpha$ auch mit $\sqrt{y}\alpha$ oder mit $y^{\frac{1}{2}}\alpha$ und pflegt zu sagen, die Zahl x sei die zweite Wurzel aus der Zahl y. Man erhält somit, wenn

$$x^2\alpha = y\alpha,$$

so ist

$$x\alpha = \sqrt{y}\alpha \text{ . . . . } (a.\ 27^*)$$

und es enthalten diese Gleichungen die Definitionen der Potenz und der Wurzel einer arithmetischen Zahl.

In gleicher Weise kann die Definition höherer Potenzen und Wurzeln (aus arithmetischen Zahlen), als die zweiten, erhalten werden, und man ersieht leicht die Richtigkeit der nachstehenden Formeln

$$x^m x^n \alpha = x^{m+n}\alpha,$$
$$x^m y^m \alpha = (xy)^m \alpha.$$

Aus der Algebra übernehmen wir die Schreibweisen

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, \quad x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Der Beweis der auf die Wurzeln algebraischer Zahlen bezüglichen Sätze kann wie in der Algebra gegeben werden.

18. Die Deutung des Symbols $\sqrt{y}\alpha$ hat keine Schwierigkeit, wenn y eine arithmetische Zahl ist.

Aus $(a.\ 27^*)$ kann nämlich unmittelbar geschlossen werden, dass

$$\sqrt{y}\sqrt{y}\alpha = y\alpha.$$

Es ist somit $\sqrt{y}$ ein Operator, welcher zwei Male nach einander wirkend den Tensor in einem bestimmten Verhältnis ändert, die Richtung des Vektors jedoch ungeändert lässt.

Anders jedoch verhält sich die Sache, wenn y eine algebraische negative Zahl z. B. $-x$ ist; denn es soll sodann die zweimalige Anwendung des Symbols $\sqrt{-x}$ die Richtung des

Vektors umkehren. Man pflegt zu sagen: die Zahl $\sqrt{-x}$ sei imaginär und wir wollen uns mit der Deutung der Wirkung dieses Symbols in diesem Artikel weiter beschäftigen. Der Einfachheit wegen sehen wir zunächst nur nach der Deutung des Ausdrucks $\sqrt{-1}\,\alpha$ um.

Dabei soll beachtet werden, dasz wir im Einklange bleiben müssen mit der Formel

$$\sqrt{-1}(\sqrt{-1}\,\alpha) = -\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a.\,28)$$

Die zweimalige Anwendung der Operation $\sqrt{-1}$ soll deshalb den Tensor des Vektors α ungeändert lassen, die Richtung jedoch umkehren.

Es kann dies nur der Fall sein, wenn die Operation $\sqrt{-1}$ ebenfalls den Tensor ungeändert lässt und eine Drehung des Vektors um einen rechten Winkel aus seiner ursprünglichen Lage bewirkt.

Die Ebene, in der die Drehung stattfinden soll, bleibt unbestimmt. Es kann dazu nicht eine *willkürliche* durch den Vektor gehende Ebene gewählt werden, weil sodann die zweimalige Anwendung der Operation nicht zu $-\alpha$ zu führen braucht. Andrerseits hat aber keine durch α gehende Ebene einen Vorzug vor einer anderen Ebene, welche ebenso α enthält.

Wir schlieszen daraus, dass unter $\sqrt{-1}\,\alpha$ zu verstehen sei das Complex der Vektoren, erhalten durch Drehung des Vektors α um einen rechten Winkel in allen durch α gehenden Ebenen. Die sämtlichen Vektoren bilden eine Ebene und zwar eine Kreisoberfläche, beschrieben um den Anfangspunkt des Vektors α in einer zu α senkrechten Ebene mit einem Radius $= T\alpha$. Der Vektor wird deshalb, durch die Operation $\sqrt{-1}$, wie wir es nennen wollen, zu einem circularen Strahlencomplex gespalten.

Wir schlagen vor dasselbe einen Vektorkreis zu nennen, und der Anfangspunkt des Vektors α heisze der Mittelpunkt des Vektorkreises.

Unter der Richtung des Vektorkreises $\sqrt{-1}\,\alpha$ sei diejenige des Vektors α verstanden. Der Tensor des Vektorkreises sei derjenige eines jeden Radius. Einen Vektorkreis der Richtung α, dessen Radius der Längeneinheit gleichkommt, wollen wir

einen Einheitsvektorkreis nennen und mit $U.\sqrt{-1}\,\alpha$ bezeichnen. Man erhält dadurch die nachstehenden Formeln

$$T.\sqrt{-1}\,\alpha = T\alpha, \quad U.\sqrt{-1}\,\alpha = \sqrt{-1}\,U\alpha \ldots (a.\,29)$$

19. Das Symbol $z(\sqrt{-1}\,\alpha)$ sei gleichbedeutend mit $\sqrt{-1}\,(z\alpha)$, $\sqrt{-x}\,\alpha$ mit $\sqrt{-1}\,(\sqrt{x}\,\alpha)$, also

$$z(\sqrt{-1}\,\alpha) = \sqrt{-1}\,(z\alpha) \text{ und } \sqrt{-x}\,\alpha = \sqrt{-1}\,(\sqrt{x}\,\alpha) \ldots (a.\,30)$$

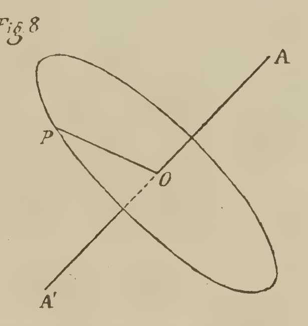
Die beiden ersteren Ausdrücke deuten wir daher als das Resultat der Anwendung der Operationen $\sqrt{-1}$ an den Vektor $z\alpha$. Es ist dasselbe ein Vektorkreis, dessen Richtung mit derjenigen des Vektorkreises $\sqrt{-1}\,\alpha$ übereinstimmt, dessen Radius jedoch im Verhältnis $z:1$ vergrössert erscheint.

Endlich sei $(y + z\sqrt{-1})\,\alpha$ gedeutet durch die Gleichung

$$(y + z\sqrt{-1})\,\alpha = y\alpha + \sqrt{-1}\,(z\alpha) \ldots . (a.\,31)$$

20. Sehen wir zu, ob wir durch die Definition des Symbols $\sqrt{-1}\,\alpha$ wirklich mit der Gleichung (a. 28) im Einklang bleiben.

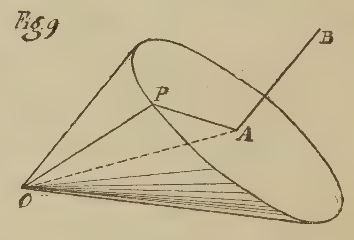
Wir wenden daher auf $\sqrt{-1}\,\alpha$, d. h. auf das Complex der Radien des Kreises, den Operator $\sqrt{-1}$ an. Aus jedem Radius OP des Vektorkreises (Fig. 8) entsteht dadurch ein Vektorkreis in einer zu OP senkrechten Ebene mit dem Radius $T\alpha$ beschrieben. Diese Ebene muss OA enthalten, weil OA $\perp$ OP. Die sämtlichen aus den Radien entstandenen Vektorkreise haben somit die beiden Vektoren OA und OA′ gemeinsam oder das durch sämmtliche Vektorkreise erhaltene Gebilde besteht aus den beiden Vektoren OA und OA′. (Es bedeutet OA′ der Negative des Vektors OA). Die zweimalige Anwendung der Operation $\sqrt{-1}$ führt demnach auf OA, oder auf OA′, oder auf beide. Es ist indessen leicht diese Zweideutigkeit aufzuklären.



Wenn wir nämlich an OA mit $-\sqrt{-1}$ operiren, so haben wir jeden aus OA durch Anwendung der Operation $\sqrt{-1}$ erhaltenen Strahl in entgegengesetzter Richtung zu nehmen. Es resultirt daher aus der Anwendung der Operation $-\sqrt{-1}$

im ganzen genommen dieselbe Figur, wie aus der Operation $\sqrt{-1}$; daher auch zweimalige circulare Spaltung des Vektors aufgefasst werden kann als die Anwendung einer der vier nachfolgenden Operationen:
$\sqrt{-1}(\sqrt{-1}), \sqrt{-1}(-\sqrt{-1}), -\sqrt{-1}(\sqrt{-1}), -\sqrt{-1}(-\sqrt{-1})$, deren erste und letzte der Operation -1, deren beiden mittleren der Operation $+1$ gleich kommen, wodurch auch die zweimalige circulare Spaltung sowohl auf $-\alpha$ als auf α führen muss.

21. Schlieszlich wollen wir noch ganz allgemein das Symbol $\alpha + \sqrt{-1}\beta$ deuten. Es sei darunter verstanden das Complex der Strahlen erhalten durch die Addition des Strahles α zu jedem der Strahlen des Vektorkreises $\sqrt{-1}\beta$.



In der Figur 9 sei $OA = \alpha$, $AB = \beta$. Der Vektorkreis $\sqrt{-1}\beta$ ist in der Figur gezeichnet. Es sei AP einer der Radien desselben, so ist $OP = OA + AP$ einer der in $\alpha + \sqrt{-1}\beta$ enthaltenen Vektoren. Lassen wir AP den Vektorkreis beschreiben, so beschreibt OP die Seitenfläche eines Kegels, dessen Mittelpunkt O, dessen Grundfläche der Kreis A ist.

Das Symbol $\alpha + \sqrt{-1}\beta$ stellt daher die sämtlichen Seitenlinien des schiefen kreisförmigen Kegels vor, dessen Scheitel der Anfangspunkt von α und dessen Grundfläche der Vektorkreis $\sqrt{-1}\beta$ ist.

Wir schlagen vor dieses Gebilde einen Vektorkegel zu nennen.

Ein Vektorkegel wird daher stets durch die sämtlichen Seitenlinien eines Kegels zweiter Ordnung (der analytischen Geometrie) gebildet.

Wenn $\beta = x\alpha$, wo x eine positive oder negative algebraische Zahl ist, wenn β daher in die Richtung von α fällt, so wird der Vektorkegel $\alpha + \sqrt{-1}x\alpha$ oder $(1 + x\sqrt{-1})\alpha$ ein rechter, indem die Grundfläche in diesem Falle senkrecht steht zur Richtung des Vektors OA oder α, welcher mit der Achse des Kegels zusammenfällt.

Aus dem im vorhergehenden Artikel Angeführten ist einleuchtend, dass die beiden Vektorkegel $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ und $\alpha - \sqrt{-1}\,\beta$ identische Gebilde darstellen.

Die Summe und die Differenz zweier Vektorkegel wollen wir durch die beiden nachfolgenden Gleichungen definiren:

$$(\alpha + \sqrt{-1}\,\beta) \pm (\alpha' + \sqrt{-1}\,\beta') = (\alpha \pm \alpha') + \sqrt{-1}\,(\beta \pm \beta') \quad (a.32)$$

Mit der Deutung des Symbols $\sqrt{-1}\,\alpha$ sind wir schon ganz auf das Gebiet der Quaternionen hinübergegangen, deren eingehendre Behandlung erst in den nächsten Abschnitten erfolgt. Wir werden dort Gelegenheit finden noch näher auf obige Deutung zurück zu kommen. (Siehe den 4ten Abschnitt, Art. 97).

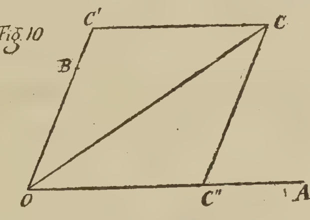
22. Wir wenden uns jetzt der Erörterung einiger sehr wichtiger Sätze zu:

1°. Jeder Vektor γ in der Ebene zweier gegebenen Vektoren α und β kann linear in α und β ausgedrückt werden; d. h. es findet eine Relation statt von der Form

$$\gamma = x\alpha + y\beta \text{ oder } a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (a.33)$$

wo x, y, a, b, c positive oder negative Skalare sind.

Die drei Vektoren α, β, γ, denken wir uns aus einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte O gezogen. Es sei $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$ (Fig. 10).



Wenn γ mit α und β in einer Ebene liegt, so werden Gerade, aus C parallel zu α und β gezogen, die Vektoren β und α bzhw. oder deren Verlängerungen schneiden müssen z. B. in C', C'' bzhw.

Es ist sodann

$$OC = OC'' + C''C = OC'' + OC'.$$

Man kann jedoch setzen

$$OC'' = x\alpha, \quad OC' = y\beta,$$

wenn x, y positive oder negative Skalare sind. Deshalb wird

$$\gamma = x\alpha + y\beta.$$

Die Gröszen x, y stellen die Verhältnisse der Längen der Componenten von γ in die Richtungen α und β zu den Längen

der Vektoren α und β selbst vor. Man ersieht daraus sogleich, dass der Vektor OC

bei positivem x und positivem y in dem Winkel AOB liegt
» negativem x » negativem y » » Gegenwinkel A'OB',
» » x » positivem y » » Nebenwinkel A'OB,
» positivem x » negativem y » » » AOB'.

Es ist unschwer die Coefficienten x und y auf andre Weise zu deuten. Man findet leicht die Transformation

$$x = \frac{OC''}{OA} = \frac{\text{Fläche} \triangle OC''B}{\text{Fläche} \triangle OAB}.$$

Es ist weiter Fläche $\triangle OC''B = \triangle OCB$, weil $C''C // OB$. Unterscheiden wir noch die gleichen Flächen OCB und OBC dadurch, dass wir setzen

$$\triangle OCB = - \triangle OBC$$

und bezeichnen die Flächen der Dreiecke OBC, OCA, OAB mit $O.\beta\gamma$, $O.\gamma\alpha$, $O.\alpha\beta$, so wird

$$x = -\frac{O.\beta\gamma}{O.\alpha\beta}, \text{ und ebenso } y = -\frac{O.\gamma\alpha}{O.\alpha\beta}.$$

Die Gleichung $\gamma = x\alpha + y\beta$ lässt sich hiernach in die nachfolgende symmetrische Gestalt bringen

$$\alpha O.\beta\gamma + \beta O.\gamma\alpha + \gamma O.\alpha\beta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (a.\,34)$$

Vektoren in einer Ebene werden complanar genannt.

Man kann nun auch leicht den umgekehrten Satz beweisen: Wenn zwischen drei Vektoren α, β, γ eine Relation stattfindet von der Form (a. 33), so müssen dieselbe complanar sein. Denn weil $\gamma = x\alpha + y\beta$, so liegen die beiden Endpunkte von γ in der Ebene von α und β; somit sind α, β, γ complanar.

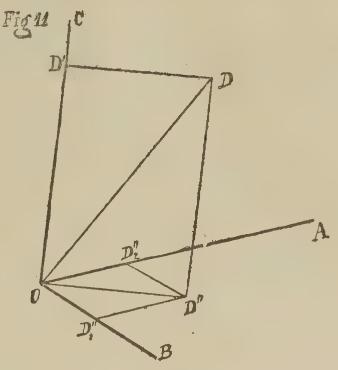
Die Gleichung (a. 33) drückt daher die Bedingung aus, unter welcher drei Vektoren complanar sind. Dieselbe wird daher die Bedingung der Complanarität genannt. In dieser Bedingung sind nach (a. 34) die Coefficienten a, b, c proportional zu den Gröszen $O.\beta\gamma$, $O.\gamma\alpha$, $O.\alpha\beta$.

2°. Jeder Vektor im Raume kann linear ausgedrückt werden in drei willkürlich gewählte nicht complanare Vektoren.

Es sei in der Figur 11

$$OA = \alpha,\ OB = \beta,\ OC = \gamma,\ OD = \delta.$$

Bringen wir eine Ebene durch OC und OD, welche die Ebene AOB schneide in OD″.



Ziehen wir

$DD'' \,//\, CO$ und $DD' \,//\, D''O$.

Endlich sei

$D''D_1'' \,//\, AO$ und $D''D_2'' \,//\, BO$,

so ist

$OD = OD'' + D''D =$

$= OD_2'' + D_2''D'' + D''D =$

$= OD_2'' + OD_1'' + OD'$.

Es kann jedoch

$OD_2'' = x\alpha$, $OD_1'' = y\beta$, $OD' = z\gamma$

gesetzt werden, wenn x, y, z positive oder negative Skalare sind.

Demnach wird

$$\delta = x\alpha + y\beta + z\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a.\,35)$$

Wir wollen noch die Bedeutung der Coefficienten x, y, z näher erörtern. Es ist nämlich

$$x = \frac{OD_2''}{OA} = \frac{\text{Fläche} \triangle OD_2''B}{\text{Fläche} \triangle OAB} = \frac{\text{Volumen ppd. } OD_2''BC}{\text{Volumen ppd. } OABC},$$

wo ppd. OABC abgekürzt steht statt des Parallelepipeds auf den Seiten OA, OB, OC construirt. Man hat weiter

Vol. ppd. $OD_2''BC$ = Vol. ppd. $OD''BC$, weil $D_2''D''$ // der Ebene OBC
= Vol. ppd. ODBC, » $D''D$ // » » OBC.

Setzen wir wieder:

$$\text{Vol. ppd. ODBC} = - \text{Vol. ppd. OBCD},$$

so wird

$$x = - \text{Vol. ppd. OBCD} : \text{Vol. ppd. OABC}.$$

Demnach geht die lineare Gleichung für δ ($a.$ 35) über in

$$\alpha\, V.\, OBCD + \beta\, V.\, OCDA + \gamma\, V.\, ODAB + \delta\, V.\, OABC = 0 . \quad (a.\,36)$$

wenn mit V. OBCD das Volumen des Parallelepipeds auf den Seiten OB, OC, OD construirt, gemeint ist.

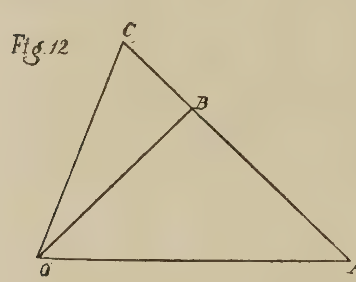
3°. Jeder Vektor γ, welcher mit zwei anderen α und β denselben Anfangspunkt O hat (oder c o i n i t i a l ist), während die drei Endpunkte C, A, B in einer Geraden liegen (drei solche Vektoren werden t e r m i n o c o l l i n e a r genannt), lässt sich darstellen durch

$$\gamma = \frac{x\alpha + y\beta}{x + y}, \text{ oder } \gamma = \frac{\alpha + u\beta}{1 + u} \quad \ldots\ldots \quad (a.\,37)$$

oder ist mit diesen anderen Vektoren α und β verbunden durch eine Relation von der Gestalt

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \text{ wo zugleich } a + b + c = 0 \quad . \quad (a.\,38)$$

x, y, u, a, b, c sind hier wieder Skalare, positive oder negative.



Es sei, um dies darzutun, in der Figur 12 $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, so findet man daraus $OB = OC + CB$, $OA = OC + CA$ somit

$$CB = OB - OC = \beta - \gamma,$$
$$CA = OA - OC = \alpha - \gamma.$$

Weil CB und CA gleiche oder entgegengesetzte Richtungen haben, so kann man setzen

$$CA = v.CB,$$

wo v ein Skalar ist, positiv, wenn CB und CA gleiche Richtungen haben d. h. wenn C auf der Verlängerung der Geraden AB liegt, negativ, wenn C auf der Geraden AB selbst liegt. Es wird hierdurch

$$\alpha - \gamma = v(\beta - \gamma)$$

$$\gamma = \frac{\alpha - v\beta}{1 - v}.$$

Indem man v durch $-u$ ersetzt, findet man, dass

$$\gamma = \frac{\alpha + u\beta}{1 + u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a.\,39)$$

einen Vektor OC darstellt, für welchen bei positivem u der Punkt C auf AB selbst, bei negativem u auf der Verlängerung der Geraden AB liegt.

Die Gleichung (a. 38) ist nur eine andere Gestalt der Gleichung (a. 37). Setzt man nämlich in (a. 39) $u = y : x$, so wird

$$\gamma = \frac{x\alpha + y\beta}{x + y}$$

oder

$$x\alpha + y\beta - (x + y)\gamma = 0,$$

oder auch

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0,$$

wenn

$$z = -(x + y) \text{ d. h. } x + y + z = 0$$

gesetzt wird.

Die Bedeutung der Coefficienten x, y, z in der zuletzt erhaltenen Gleichung lässt sich leicht angeben. Denn es war

$$v = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} \text{ oder } u = -\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}.$$

Deshalb ist auch

$$\frac{y}{x} = -\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}} \text{ oder } \frac{x}{\mathrm{BC}} = \frac{y}{\mathrm{CA}},$$

und hieraus leitet man her:

$$\frac{x}{\mathrm{BC}} = \frac{y}{\mathrm{CA}} = \frac{x + y}{\mathrm{BC} + \mathrm{CA}} = \frac{-z}{\mathrm{BA}} = \frac{z}{\mathrm{AB}}$$

oder schlieszlich

$$\frac{x}{\mathrm{BC}} = \frac{y}{\mathrm{CA}} = \frac{z}{\mathrm{AB}}.$$

Dieselbe Bedeutung haben die Coefficienten a, b, c in der Gleichung (a. 38). Dabei müssen die Richtungen der Geraden BC, CA, AB beachtet werden.

4⁰. An das Vorhergehende schlieszt sich die Frage an, einen Vektor, welcher mit drei anderen gegebenen Vektoren coinitial ist und seinen Endpunkt in der Ebene der Endpunkte dieser drei gegebenen Vektoren hat, mittelst derselben auszudrücken.

Es seien $\mathrm{OA} = \alpha$, $\mathrm{OB} = \beta$, $\mathrm{OC} = \gamma$ die gegebenen Vektoren, $\mathrm{OP} = \rho$ der gesuchte Vektor, so müssen die Vektoren $\alpha - \rho = \mathrm{PA}$, $\beta - \rho = \mathrm{PB}$, $\gamma - \rho = \mathrm{PC}$ complanar sein; daher muss nach (a. 33) irgend eine Relation von der Form

$$x(\alpha - \rho) + y(\beta - \rho) + z(\gamma - \rho) = 0$$

stattfinden, und hieraus erhält man unmittelbar

$$\rho = \frac{x\alpha + y\beta + z\gamma}{x + y + z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 40)$$

wodurch die gestellte Frage gelöst ist.

23. Geometrische Örter. Im vorigen Artikel sahen wir, dass

$$\rho = \frac{\alpha + u\beta}{1 + u},$$

wenn man u alle möglichen Werte beilegt, einen geometrischen Ort darstellt, nämlich die Verbindungsgerade der Endpunkte der Vektoren α und β.

Allgemeiner können wir sagen, dass

$$\rho = f(u)\,\alpha + \Phi(u)\,\beta \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (a.\,41)$$

wo u ein Skalar und α und β gegebene Vektoren bedeuten, einen geometrischen Ort, eine gewisse Curve, in der Ebene von α und β darstellt.

Denn die Gleichung (a. 41) sagt aus, dass ρ aus den beiden Componenten $f(u)\alpha$ und $\Phi(u)\beta$ zusammengesetzt gedacht werden kann. Wählen wir daher die Richtungen der Vektoren α und β als X und Y Achse eines recht- oder schiefwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt der gemeinsame Anfangspunkt der Vektoren α und β sei, so können wir für irgend einen Punkt, dessen Vektor ρ der Gleichung (a. 41) genügt, schreiben

$$x = f(u)T\alpha\,, \quad y = \Phi(u)T\beta \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (a.\,42)$$

und die Elimination von u zwischen diesen beiden Gleichungen führt auf eine Gleichung:

$$F(xy) = C,$$

die analytische Gleichung der fraglichen Curve im gewählten Coordinatensystem.

Es wird in diesem Falle ρ eine Funktion des Skalars u genannt.

In derselben Weise erkennt man, dass

$$\rho = \psi\,(u\,,v)\,\alpha + f\,(u\,,v)\,\beta + \Phi\,(u\,,v)\,\gamma \,.\,.\,.\,. \quad (a.\,43)$$

wenn α, β, γ drei nicht complanare Vektoren sind, eine Oberfläche darstellt, und dass man die Gleichung derselben in analytischen Raumcoordinaten in Bezug auf α, β, γ als Coordinatenachsen erhält durch die Elimination von u, v zwischen den drei Gleichungen

$$x = \psi\,(u, v)\,T\alpha\,,\; y = f\,(u, v)\,T\beta,\; z = \Phi\,(u, v)\,T\gamma \quad .\; (a.\,44)$$

Und ebenso wird mit

$$\rho = \psi\,(u)\,\alpha + f\,(u)\,\beta + \Phi\,(u)\,\gamma \,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (a.\,45)$$

eine Raumcurve bezeichnet, weil man zwischen den Gleichungen

$$x = \psi(u)\, T\alpha,\ y = f(u)\, T\beta,\ z = \Phi(u)\, T\gamma \ldots (a. 46)$$

den Skalar u zweimal eliminiren kann.

Man hätte dies auch ohne die Zuhülfenahme der analytischen Geometrie leicht ersehen können.

Wenn man nämlich dem Skalar u in (a. 45) nach einander alle möglichen Werte erteilt, so wird der Endpunkt des Vektors ρ dieser Gleichung eine Raumcurve beschreiben müssen, weil im allgemeinen auf jeden der Gleichung (a. 45) genügenden Wert von ρ nur ein einziger Wert von ρ folgen wird.

Bei der Gleichung (a. 43) jedoch kann man, indem ein bestimmter Wert der Grösze u beigelegt, v dagegen veränderlich gelassen wird, den Endpunkt des Vektors ρ erst eine Curve beschreiben lassen; wählt man nachher einen andren bestimmten Wert für u, so beschreibt auch der Endpunkt des Vektors ρ eine andre Curve. Wiederholt man dies für alle möglichen Werte der Grösze u, so werden alle in solcher Weise erhaltenen Curven eine Oberfläche bilden.

Noch sei erwähnt, dass mit der Gleichung (a. 43) die nachstehende

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma$$

aequivalent ist, wenn überdies eine bestimmte Relation zwischen x, y, z gegeben ist. Und in derselben Weise ist (a. 45) mit jener Gleichung aequivalent, wenn ausserdem noch zwei bestimmte Relationen zwischen x, y, z stattfinden.

24. Einige Beispiele mögen das Vorhergehende erläutern:

1⁰. $\rho = u\alpha + \sqrt{1 - u^2}\beta$ mit der Bedingung $-1 < u < 1$ stellt eine Ellipse dar; wenn man $T\alpha = a$, $T\beta = b$ nimmt, so werden die Gleichungen (a. 42) für diesen Fall

$$x = ua,\ y = \sqrt{1 - u^2}\, b \text{ oder } x = a \cos\theta,\ y = b \sin\theta$$

und diese Gleichungen gehören jedem Punkte einer Ellipse an, in welcher die Vektoren α und β als conjugirte Durchmesser vorkommen.

2⁰. $\rho = u\alpha + v\beta + \sqrt{1 - u^2 - v^2}\,\gamma$, mit der Bedingung $-1 < \sqrt{u^2 + v^2} < 1$, ist die Gleichung eines Ellipsoids, mit α, β, γ als conjugirten Durchmessern.

3⁰. $\rho = u^2\alpha + v^2\beta + (u + v)^2\gamma$ führt zur Elimination von

u, v aus

$$x = u^2 a,\ y = v^2 b,\ z = (u + v)^2 c = (u^2 + 2uv + v^2)c.$$

Es ist hierdurch

$$u^2 = \frac{x}{a},\ v^2 = \frac{y}{b},\ 2\,uv = \frac{z}{c} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b},$$

und die Elimination ergibt

$$\left(\frac{z}{c} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - \frac{4\,xy}{ab} = 0$$

einen Kegel zweiten Grades, der durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, oder OBC, OCA, OAB, wie unmittelbar ersichtlich, berührt wird.

4^0. Ebenso führt

$$\rho = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} - \frac{\gamma}{u + v}$$

zur Elimination von u, v aus

$$x = \frac{a}{u},\ y = \frac{b}{v},\ z = -\frac{c}{u + v}.$$

Dadurch ergibt sich

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \text{ oder } ayz + bzx + cxy = 0.$$

Die gegebene Gleichung gehört somit wieder einem Kegel zweiten Grades an, welcher jedoch in diesem Falle die Durchschnitte der Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, zu je zwei genommen, d. h. die Geraden OA, OB, OC, enthält.

25. Differentiale von Vektoren. Wenn ein Differential eines Vektors α ohne weitere Nebenbedingung gebildet werden soll, so wird damit gemeint ein willkürlicher Vektor aus dem Endpunkte des Vektors α gezogen.

Es erscheint aber weiter, wie aus den drei vorhergehenden Artikeln einleuchtet, ein Vektor ρ manchmal als Funktion anderer gegebenen Vektoren α, β, γ und einer oder mehrerer Skalarvariabeln u, v...... Wir wollen diese Funktion ganz allgemein denken

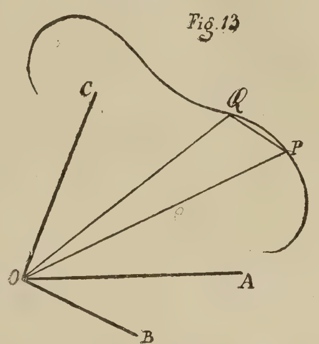
$$\rho = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, u, v \ldots.) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 47)$$

Es kann nun gefragt werden, welche Änderung ρ erleidet, wenn man eine oder mehrere der Gröszen α, β, γ, u, v..... eine Änderung erfahren lässt.

Dies zu veranschaulichen ist die Figur 13 gezeichnet. O ist der Vektorenanfangspunkt, die gezeichnete Curve der von dem Endpunkte des Vektors $OP = \rho$ beschriebene geometrische Ort.

Bei demselben wollen wir α, β, γ constant erhalten und nur eine Änderung der Grösze u erteilen. Die Gleichung (a. 47) hat nämlich bei einer Raumcurve, wie wir in. Art. 23 sahen, die Gestalt $\rho = \Phi\,(\alpha, \beta, \gamma, u)$; weil α, β, γ constant bleiben, so wollen wir hierfür einfacher schreiben

$$\rho = \psi\,(u).$$



Eine Änderung der Grösze u allein bewirkt, dass der Punkt P die Curve entlang sich bewegt, z. B. nach Q. Es ist deshalb OQ — OP oder PQ die durch Änderung von u bewirkte Änderung von ρ oder

$$PQ = \triangle\,\rho = \psi\,(u + \triangle\,u) - \psi\,(u).$$

Hamilton wählt nun als Definition des Differentials des Vektors ρ

$$d\rho = d\psi\,(u) = \text{Lim. } n \left\{ \psi\left(u + \frac{du}{n}\right) - \psi(u) \right\}, \text{ für } n = \infty\,. \quad (a.\ 48)$$

und diese Definition hat den Vorteil vor der üblichen, dass mit derselben die Gröszen $d\rho$ und du nicht notwendig als unendlich klein betrachtet zu werden brauchen. Andrerseits ist dieselbe für diesen Fall mit der üblichen Definition im Einklang, wie leicht ersichtlich.

Ist nämlich du nicht unendlich klein, so nähert sich doch bei wachsendem n die Grösze $\frac{du}{n}$ der Null. Man kann deshalb bei sehr grossem n die Grösze $\psi\left(u + \frac{du}{n}\right)$ durch

$$\psi\,(u) + \psi'\,(u)\,\frac{du}{n} + \psi''(u).\tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{n}\right)^2 + \ldots.$$

ersetzen, wobei ψ', ψ'' die Derivirten der Funktion ψ bedeuten. Es wird deshalb

$$d\rho = \text{Lim. } n \left\{ \psi'(u) \frac{du}{n} + \psi''(u) \tfrac{1}{2} \left(\frac{du}{n}\right)^2 + \ldots\ldots \right\} = \psi'(u)\, du.$$

Das so definirte Differential von ρ hat auch eine leicht angebbare geometrische Bedeutung. Bei wachsendem n nähert sich nämlich der Vektor $\psi\left(u + \frac{du}{n}\right)$ dem Vektor $\psi(u)$ oder OP d. h. in der Figur 13 nähert der Punkt Q die Curve entlang sich dem Punkte P. Es wird deshalb $\psi\left(u + \frac{du}{n}\right) - \psi(u)$ bei wachsendem n als ein unendlich kleines Bogenelement der Curve betrachtet werden können, und Lim. $n\left[\psi\left(u + \frac{du}{n}\right) - \psi(n)\right]$ oder $d\rho$ wird ein endlicher Vektor in der Richtung der Tangente im Punkte P sein.

Der Tensor dieser Vektors ist $du . T\psi'(u)$; den Wert dieses Tensors, wenn du der Einheit gleich genommen wird, wollen wir den Tensor des Tangentialvektors im Punkte P nennen, und den Vektor mit diesem Tensor einfach den Tangentialvektor im Punkte P. Derselbe ist eine Funktion von u, nämlich $\psi'(u)$.

Aus dem Tangentialvektor können wir sodann wieder einen anderen Vektor herleiten, nämlich

$$d\psi'(u) = \text{Lim. } n \left\{ \psi'\left(u + \frac{du}{n}\right) - \psi'(u) \right\}, \text{ für } n = \infty .$$

und dieser wird das zweite Differential des Vektors ρ genannt.

Die oben definirten Differentiale $d\rho$ und du sind von Hamilton simultane Differentiale genannt worden.

26. Die *Länge* s des Bogens der Curve, von einem bestimmten Punkte P_0 derselben bis zum Punkte P gemessen, kann als eine Funktion $F(u)$ des Skalars u betrachtet werden. Man kann demnach die Grösze ds nach der Formel

$$ds = \text{Lim. } n \left[F\left(u + \frac{du}{n}\right) - F(u) \right], \text{ Lim. } n = \infty \quad . \ (a. 49)$$

berechnen; und das in dieser Weise bestimmte ds ist ein Skalar, weil dasselbe von s oder $F(u)$ gilt. Es lässt sich nun aber leicht ersehen, dass das in diesem Sinne genommene ds der Grösze $Td\rho$ gleich kommt, so dass man die Relation

$$ds = Td\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 50)$$

hinschreiben kann.

Denn es sei in der Figur 14, wo $P_0P = s$, $OP = \rho$ genommen ist

$$T.P_0P' = F\left(u + \frac{du}{n}\right),\ OP' = \psi\left(u + \frac{du}{n}\right)$$

somit

$$T.PP' = F\left(u + \frac{du}{n}\right) - F(u)\ . \quad (a.\ 51)$$

$$PP' = \psi\left(u + \frac{du}{n}\right) - \psi(u)\ . \quad (a.\ 52)$$

Es ist sodann nach $(a.\ 49)$, $(a.\ 51)$

$$ds = \text{Lim.}\ nT.PP'$$

$= T.\ \text{Lim.}\ n.PP'$ nach $(a.\ 4)$

$= T.d\rho$, nach $(a.\ 52)$ in Verbindung mit der Definitionsgleichung der Grösze $d\rho$.

Die Gleichung $(a.\ 50)$ wird bei späteren Anwendungen mehrmals benutzt werden.

27. Wenn ρ zu einer Oberfläche gehört, daher der Gleichung $(a.\ 43)$

$$\rho = \psi(u, v)\,\alpha + f(u, v)\,\beta + \Phi(u, v)\,\gamma = F(u, v)$$

genügt, so kann man auch partielle simultane Differentiale von ρ bilden

$$d_u\rho = \text{Lim.}\ n\left[F\left(u + \frac{du}{n}, v\right) - F(u, v)\right],$$

$$d_v\rho = \text{Lim.}\ n\left[F\left(u, v + \frac{dv}{n}\right) - F(u, v)\right],$$

Vektoren, welche beide in der Tangentialebene des Punktes mit dem Vektor ρ liegen.

QUOTIENTEN VON VEKTOREN.

QUATERNIONEN.

---

28. Die Operation, durch welche ein Vektor α in einen anderen β übergeführt wird, heisst der Quotient der Vektoren β und α oder der Quaternion β dividirt durch α [1]). Man schreibt denselben

$$\beta : \alpha = q \text{ oder } \frac{\beta}{\alpha} = q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,1)$$

und nennt, dem bisherigen Sprachgebrauch gemäsz, β den Dividendus oder Zähler, α den Divisor oder Nenner.

Dass der Operator q an einen Vektor α wirkt und dass daraus β resultirt, bezeichnen wir wie nachstehend,

$$\beta = q\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,2)$$

Die Operation der Überführung eines Vektors in einen anderen besteht aus

1⁰. einer Ausdehnung oder Zusammendrückung des Vektors α, bis dessen Tensor demjenigen des Vektors β gleich geworden ist.

2⁰. einer Drehung in der Ebene der beiden Vektoren α und β d. h. um eine Achse senkrecht zu dieser Ebene, während der Drehungswinkel dem Winkel zwischen den Vektoren α und β gleich kommt.

Ein Quaternion ist deshalb bestimmt durch:

---

1) Man sehe die Anmerkung auf S. 2.

1°. die Grösze der Ausdehnung oder Contraction, d. h. das Verhältnis der Tensoren der beiden Vektoren, also

$$T\beta : T\alpha \text{ oder } \frac{T\beta}{T\alpha}.$$

Dieses Verhältnis wird Tensor des Quaternions q genannt und mit Tq bezeichnet. Es gilt demnach die Gleichung

$$Tq = \frac{T\beta}{T\alpha} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \quad (b.\, 3)$$

Weil $T\alpha$ und $T\beta$ nach dem vorigen Abschnitt arithmetische Zahlen sind, so ist auch Tq stets eine solche.

2°. Die Ebene, in der die Drehung stattfinden soll. Anstatt dieser Ebene pflegt man das Lot dazu in einem bestimmten Sinne gezogen zu geben. Wir wollen die Verabredung machen, dass die Senkrechte zur Ebene der beiden Vektoren stets nach *der* Seite gezogen wird, von welcher aus gesehen die Drehung von α nach β entgegengesetzt der Bewegung der Zeiger einer Uhr erscheint.

Das so bestimmte Lot soll die Achse des Quaternions q heiszen und mit $Ax.q$ bezeichnet werden. Dieselbe ist ein Vektor unbestimmter Länge.

3°. Die Grösze des Drehungswinkels des Quaternions, welchen wir mit $\angle q$ bezeichnen wollen. Wir setzen vorläufig fest, dass derselbe stets zwischen 0 und π enthalten sein soll.

Weil die Achse des Quaternions durch zwei Gröszen bestimmt wird, z. B. durch die beiden Winkel mit zwei gegebenen Vektoren in einem bestimmten Sinne gezählt, so braucht man zur Bestimmung eines willkürlichen Quaternions im ganzen vier Gröszen, daher Hamilton auch den Namen »Quaternion" derivirte.

29. Zwei Quaternionen sollen einander gleich heiszen, wenn dieselben in Tensor, Achse und Drehungswinkel übereinstimmen.

Wenn wir demnach die beiden Vektoren OA und OB eines Quaternions OB : OA in der Ebene OAB drehen, während die Tensoren der Vektoren ungeändert bleiben oder beide in demselben Verhältnis geändert werden, und solches während der Winkel zwischen den Vektoren constant erhalten wird, so bleibt auch

der Quaternion ungeändert. Oder kürzer kann man auch sagen: Wenn das Dreieck OAB in seiner Ebene gedreht wird und zugleich deformirt, so dass es sich selbst ähnlich bleibt, so bleibt der Quaternion OB : OA ungeändert.

Es folgt hieraus noch die Formel

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{x.\mathrm{OB}}{x.\mathrm{OA}}$$

wenn x einen Skalar bedeutet.

Auch bei Quaternionen wollen wir die Gültigkeit der beiden Grundsätze des ersten Abschnittes (Art. 3) annehmen.

Wenn $\frac{\beta}{\alpha} = q$ und $\frac{\beta'}{\alpha'} = q'$, während $q = q'$, so braucht noch nicht $\beta = \beta'$ und $\alpha = \alpha'$ zu sein. Es ist vielmehr nur notwendig, dass die Vektoren β' und α' (OB′ und OA′) mit β und α (OB und OA) in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegen, wodurch $Ax.q$ mit $Ax.q'$ übereinstimmt, und dass die Dreiecke OAB und OA′B′ ähnlich sind. Denn es ist hierdurch $\angle q = \angle q'$ und $Tq = Tq'$.

30. Die beiden Operationen, aus welchen nach Art. 28 ein Quaternion zusammengesetzt ist, können wir auch nach einander ausgeführt denken; zuerst die Drehung, nachher die Ausdehnung (oder Zusammendrückung) oder umgekehrt.

Wir wollen die im Quaternion q enthaltene Drehung den Versor des Quaternions nennen und mit Uq bezeichnen. Dass dieser Operator an einen Vektor α wirkt, geben wir dadurch zu erkennen, dass wir das Symbol Uq vor das Zeichen α setzen, durch einen Punkt von einander getrennt.

Uq ist, wie aus dem Vorigen ersichtlich, ein Quaternion, der einen Vektor in einen anderen gleicher Länge überführt. Die absolute Grösze dieser Länge kommt nach dem Vorigen nicht in Betracht. Wir können deshalb die Formel hinschreiben

$$Uq = \frac{U\beta}{U\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 3^*)$$

Ein solcher Quaternion wird von Hamilton Radial genannt. Wir haben somit

$$TUq = 1, \quad UUq = Uq \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 4)$$

Uq ist bestimmt durch $Ax.q$ und $\angle q$.

31. Nach dem vorigen Artikel ist $Uq.\alpha$ ein aus α entstandener Vektor. Lassen wir nun an diesen den Skalaroperator Tq wirken d. h. unterwerfen wir den in die neue Lage geratenen Vektor einer Ausdehnung, so wird dies durch das nachfolgende Zeichen ausgedrückt: $Tq\,Uq.\alpha$.

Es hat nun aber die ganze Operation q stattgefunden; das Resultat ist somit auch $q\alpha$ nach (b. 2) und wir können deshalb symbolisch schreiben:

$$q = Tq\,Uq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 5)$$

und sagen sodann, dass Uq mit Tq multiplicirt ist [1].

32. Soll ein Vektor in einen anderen gleicher Richtung übergeführt werden, so wird dies schon durch die alleinige Anwendung der Operation Tq bewirkt. Es ist demnach in diesem Falle $q = Tq$ zu setzen, und zugleich, nach (b. 5), $Uq = 1$.

Soll ein Vektor in einen anderen entgegengesetzter Richtung übergeführt werden, so wird dies ebenso durch die alleinige Anwendung der Operation $-Tq$ bewirkt. In diesem Falle ist daher zu setzen $q = -Tq$ und zugleich, nach (b. 5), $Uq = -1$. Es erscheinen hiernach die positive und die negative Einheit als eine besondere Art von Versoren.

In diesem Sinne kann die Wirkung einer positiven oder negativen algebraischen Zahl $+x$ oder $-x$, wo x eine arithmethische Zahl bedeutet, wie nachstehend gedeutet werden

$$(+x)\,\alpha = x\,(+1.\alpha) \text{ und } (-x)\alpha = (-1.\alpha).$$

33. Wie Uq so ist auch Tq ein Quaternion, nämlich ein solcher, der einen Vektor in einen anderen gleicher Richtung überführt. Es ist deshalb

$$TTq = Tq,\ UTq = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 6)$$

Hamilton führt in seine Rechnungsweise auch noch den Ausdruck Norm eines Quaternions ein mit dem Zeichen Nq und mit der Definition

$$Nq = (Tq)^2 = Tq^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 7)$$

Diese Gleichung besagt zugleich, dass wir bei $(Tq)^2$ die Klammern der Einfachheit wegen fortlassen wollen.

---

1) Man sehe die Anmerkung auf S. 2.

34. Wenn der Quaternion q den Vektor α in β überführt, so sei mit $\frac{1}{q}$ derjenige Quaternion bezeichnet, welcher umgekehrt den Vektor β in α übergehen macht.

Weil Uq den Einheitsvektor der Richtung α in denjenigen der Richtung β überführt, so wird $\frac{1}{Uq}$ den Übergang des Einheitsvektors $U\beta$ in $U\alpha$ bewirken.

Es sind wohl unmittelbar die nachfolgenden Gleichungen einleuchtend

$$Ax.\frac{1}{q} = -Ax.q, \quad \angle\frac{1}{q} = \angle q, \quad T\frac{1}{q} = \frac{1}{Tq}, \quad U\frac{1}{q} = \frac{1}{Uq}. \quad (b.8)$$

Die dritte dieser Gleichungen wird übrigens, wie nachstehend, bewiesen:

$$T\frac{1}{q} = T\frac{\alpha}{\beta} = \frac{T\alpha}{T\beta} = \frac{1}{\frac{T\beta}{T\alpha}} = \frac{1}{T\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{1}{Tq}.$$

Man schlieszt hieraus noch

$$N\frac{1}{q} = \left(T\frac{1}{q}\right)^2 = \left(\frac{1}{Tq}\right)^2 = \frac{1}{Tq^2} = \frac{1}{Nq} \; . \; . \; . \; (b.8^*)$$

$\frac{1}{q}$ wird der reciproke Quaternion des Quaternions q genannt.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass der Reciproke eines reciproken Quaternions, der ursprüngliche Quaternion ist.

Die Quaternionen q und $\frac{1}{q}$ können deshalb reciprok zu einander genannt werden.

In einer Formel heiszt dies

$$\frac{1}{\frac{1}{q}} = q \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b.9)$$

35. Zwei Quaternionen mit gleichem Tensor, gleichem Drehungswinkel aber entgegengesetzter Achse werden conjugirte Quaternionen genannt, und wenn q der eine derselben ist, so wird der andere mit Kq bezeichnet.

Führt q den Vektor OA in OB über, oder ist $q=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$, so können wir in der Ebene OAB einen Vektor OB′ zeichnen (Figur 15), welcher mit OA nach der andern Seite einen Winkel bildet, der dem Winkel AOB gleich kommt und dessen Tensor der Relation genügt

$$T.\mathrm{OB}'=T.\mathrm{OB}.$$

Es wird sodann $\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}}$ den Quaternion Kq darstellen oder Kq führt OA in OB′ über. Die nachfolgenden Formeln gelten demnach:

$$Ax.Kq=-Ax.q,\ \angle Kq=\angle q,\ TKq=Tq,\ UKq=U\frac{1}{q}=\frac{1}{Uq}. \quad (b.10)$$

Aus $TKq=Tq$ folgt noch

$$NKq=Nq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.11)$$

Aus den Relationen (b. 10) ergibt sich

$$Kq=TKq\ UKq=Tq.\frac{1}{Uq} \quad \ldots\ldots (b.11^*)$$

Unmittelbar wird die nachstehende Formel einleuchten:

$$K(Kq)=q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.12)$$

oder in Worten, der Conjugirte eines conjugirten Quaternions ist der ursprüngliche Quaternion.

Der Kürze halber wollen wir anstatt $K(Kq)$ einfach KKq oder K^2q schreiben.

Man ersieht dann auch weiter die Richtigkeit der Formeln

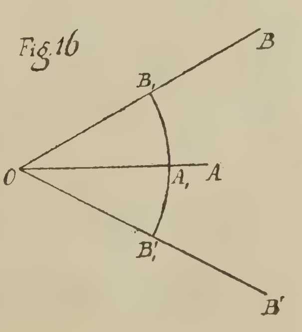
$$K^{2m}q=q,\ K^{2m+1}q=Kq,$$

wenn m eine ganze Zahl bedeutet.

Die Symbole K und U an einen Quaternion nach einander operirend, sind commutativ, oder

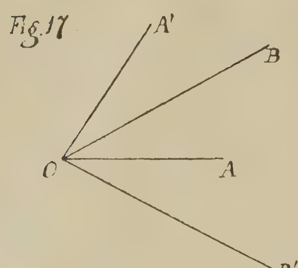
$$KUq=UKq \quad \ldots \quad (b.13)$$

Denn, wenn in der Figur 16 $q=\mathrm{OB}:\mathrm{OA}$, $Kq=\mathrm{OB}':\mathrm{OA}$, während OB_1, OA_1, OB_1' Einheitsvektoren sind, so ist



$$KUq=K\frac{\mathrm{OB}_1}{\mathrm{OA}_1}=\frac{\mathrm{OB}_1'}{\mathrm{OA}_1}=U\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}}=UKq.$$

Durch die Verbindung der Begriffe dieses Artikels mit denen des vorigen erhält man noch mit Hülfe der Figur 17, bei welcher



$$\angle \mathrm{A'OB} = \angle \mathrm{BOA} = \angle \mathrm{AOB'},$$

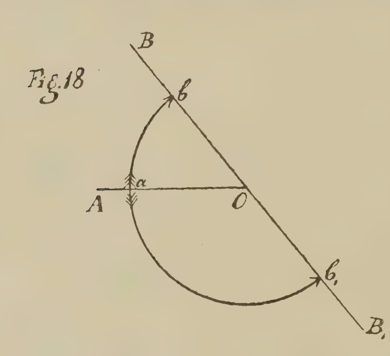
und

$$T.\mathrm{OA'} = T.\mathrm{OA}, \quad T.\mathrm{OB'} = T.\mathrm{OB}:$$

$$K\frac{1}{q} = K\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB'}} = \frac{1}{Kq}$$

oder kürzer $K\frac{1}{q} = \frac{1}{Kq}$ . . . (b. 14)

36. Unter xq, wobei wir voraussetzen $q = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$, während x ein positiver oder negativer Coefficient ist, wollen wir verstehen den Quaternion, welcher den Vektor OA in den Vektor x.OB überführt, wodurch wir die Gleichung erhalten



$$xq = \frac{x.\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \quad . . . (b. 15)$$

In dem besonderen Falle $x = -1$, schreiben wir einfacher

$$-q = \frac{-\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}_1}{\mathrm{OB}} \text{ (Figur 18).}$$

Wir können im allgemeinen zwei Fälle unterscheiden

1°. x ist ein positiver Skalar. Es ist sodann

$$Ax.xq = Ax.q, \ \angle xq = \angle q, \ Txq = xTq, \ Uxq = Uq \quad . . (b. 16)$$

2°. x ist ein negativer Skalar, nämlich $-y$. Bei dieser Annahme wird

$$Ax.xq = -Ax.q, \ \angle xq = \pi - \angle q, \ Txq = yTq, \ Uxq = -Uq \quad (b. 17)$$

Die letztere dieser Formeln ist nachstehend bewiesen.

$$Uxq = U(-y)q = U\frac{-y.\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \text{ nach der Definition } (b. 15) =$$

$$= U.y\frac{(-\mathrm{OB})}{\mathrm{OA}} \text{ nach } (a. 21)$$

$$= U.\frac{-\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \text{ nach } (b. 16) = U(-q).$$

Es ist jedoch $U.(-q)$ ein Quaternion, welcher den Einheitsvektor Oa (Fig. 18) in Ob_1 überführt, und dieser ist der Negative des Radials $\frac{Ob}{Oa}$; deshalb ist

$$U(-q) = -Uq \qquad (b. 18)$$

und schlieszlich

$$Uxq = -Uq.$$

Als besondere Fälle der Gleichungen (b. 16) (b. 17) können betrachtet werden

$$Tx = x$$

wenn x eine arithmetische Zahl ist, und

$$Tx = y$$

wenn x die algebraische negative Zahl $-y$ bedeutet.

Denn es ist in dem ersten Falle

$$Tx = T(x.1) = xT1 \text{ nach } (b. 16) = x$$

und in dem zweiten Falle

$$Tx = T(y.-1) = yT.-1 \text{ nach } (b. 17) = y,$$

weil das Verhältnis der Längen der Vektoren bei dem Quaternion -1 der Einheit gleich kommt.

Die Ausdrücke $x(yq)$, xyq und $(xy)q$ betrachten wir als identisch.

Wenn an einen Vektor α zuerst die Operation x und nachher die Operation q vollzogen werden soll, so wollen wir dies schreiben $qx\alpha$.

Es gilt der Satz

$$qx\alpha = xq\alpha \qquad (b\ 18^*)$$

Denn es ist offenbar gleichgültig, ob wir erst den Tensor des Vektors im Verhältnis x ändern, sodann den erhaltenen Vektor drehen und wieder den Tensor im Verhältnis Tq ändern, oder ob man erst den Vektor dreht, und sodann den Tensor nach einander in den Verhältnissen Tq und x sich ändern lässt.

Ebenso ersieht man leicht, dass

$$xyq = yxq \qquad (b. 18^{**})$$

weil

$$xyq = xy\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{xy\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \text{ nach } (b. 15) = \frac{yx\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \text{ nach } (a. 7) = yx\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = yxq$$

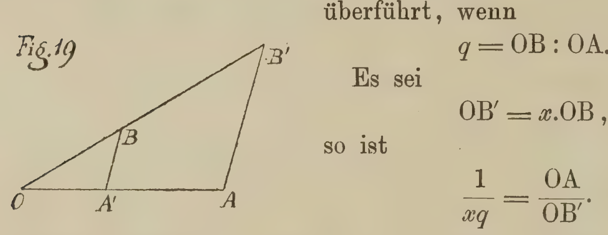
und im allgemeinen wird einleuchtend sein, dass die arithmetischen Zahlen an einen Quaternion operirend dieselben Gesetze befolgen müssen, denen sie bei ihrer Operation an Vektoren gehorchen.

Einige weiteren Formeln sind

$$1^0. -(-q) = -\left(-\frac{OB}{OA}\right) = -\frac{-OB}{OA} = \frac{-(-OB)}{OA} = \frac{OB}{OA} = q. \quad (b. 19)$$

Man nennt $-q$ den negativen Quaternion von q. Es ist deshalb der Negative eines negativen Quaternions der ursprüngliche Quaternion.

2^0. $\frac{1}{xq}$ ist ein Quaternion, welcher den Vektor $x.OB$ in OA überführt, wenn



$$q = OB : OA.$$

Es sei

$$OB' = x.OB,$$

so ist

$$\frac{1}{xq} = \frac{OA}{OB'}.$$

Ziehen wir B'A und BA'//B'A, so erhalten wir

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OA'}{OB}.$$

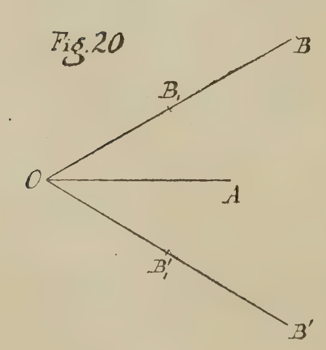
Weil aber

$$T.OA' : T.OA = T.OB : OB' = 1 : x,$$

so ist

$$T.OA' = \frac{1}{x} T.OA \text{ und demnach } OA' = \frac{1}{x} OA.$$

Es wird hierdurch



$$\frac{1}{xq} = \frac{OA'}{OB} = \frac{\frac{1}{x}OA}{OB} = \frac{1}{x}\frac{OA}{OB} = \frac{1}{x}\frac{1}{q}. \quad (b. 20)$$

3^0. $K.xq = xKq$. Dies zu beweisen, setzen wir erst voraus, x sei ein positiver Skalar. Wir nehmen an, dass in der Figur 20 $q = OB : OA$, $xq = OB_1 : OA$, $\angle AOB' = \angle BOA$, $T.OB' = T.OB$ und $T.OB_1' = T.OB_1$.

Es wird dadurch

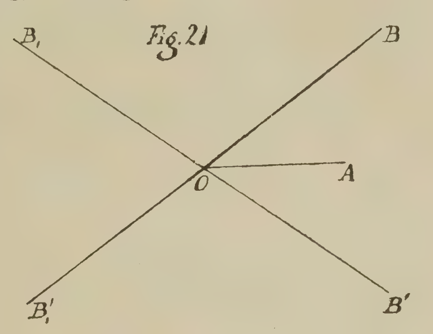
$$K.xq = K.\frac{OB_1}{OA} = \frac{OB_1'}{OA} = \frac{x.OB'}{OA} = x\frac{OB'}{OA} = xKq.$$

Weiter wollen wir zeigen, dass

$$K(-q) = -Kq \text{ . . . . } (b.\ 21)$$

Zu diesem Zwecke haben wir nur in der Figur 18 OB_1 durch den negativen Vektor von OB, von dem Punkte O aus gezogen, zu ersetzen, wie in der Figur 21, in welcher

$$T.OB = T.OB' =$$
$$= T.OB_1 = T.OB_1'.$$



Es ist jetzt, wie bei dem vorigen Beweise

$$K(-q) = K.\frac{OB_1'}{OA} = \frac{OB_1}{OA} = \frac{-OB'}{OA} = -\frac{OB'}{OA} = -Kq.$$

Allgemeiner ist dadurch, wenn y positiv ist

$$K(-yq) = -Kyq = -yKq,$$

sodass für alle positiven und negativen Werte von x die Formel

$$Kxq = xKq \text{ . . . . } (b.\ 22)$$

bewiesen ist.

Wenn wir den Ausdruck $\frac{x}{q}$ als gleichbedeutend annehmen mit $x\frac{1}{q}$, wie wir durch die Gleichung (*b.* 23) aussprechen wollen,

$$\frac{x}{q} = x\frac{1}{q} \text{ . . . . } (b.\ 23)$$

so lässt die Gleichung (*b.* 11*) sich auch in die nachstehende Gestalt bringen

$$Kq = \frac{Tq}{Uq} \text{ . . . . } (b.\ 24)$$

und weil

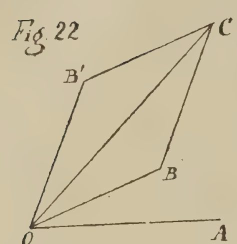
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{Tq\ Uq} = \frac{1}{(Tq)^2}\ \frac{Tq}{Uq} = \frac{1}{Nq}\ \frac{Tq}{Uq},$$

so kann auch erhalten werden

$$\frac{1}{q} = \frac{Kq}{Nq} \text{ oder } Kq = \frac{Nq}{q} \text{ . . . . . . } (b.\ 24^*)$$

37. Die Summe zweier Quaternionen mit gleichem Nenner, wollen wir durch die Gleichung (b. 25) definiren

$$q + q' = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta'}{\alpha} = \frac{\beta + \beta'}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (b.\ 25)$$



Es ist leicht diese Definition geometrisch zu interpretiren. Wenn in der Figur 22,

$$\alpha = \mathrm{OA},\ \beta = \mathrm{OB},\ \beta' = \mathrm{OB}',$$

so sei BC //= OB' gezogen.

Es wird dadurch

$$q + q' = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}.$$

Die Summe zweier Quaternionen mit gleichem Divisor ist somit ein neuer Quaternion.

Aus der Definition der Summe folgt sogleich, dass dabei der Satz gilt

$$q + q' = \frac{\beta + \beta'}{\alpha} = \frac{\beta' + \beta}{\alpha} \text{ (nach } a.\ 1) = q' + q.$$

Und allgemein ist wegen der Gleichung (a. 1), wenn q, q', q'', ... Quaternionen mit gleichem Divisor sind

$$q + q' + q'' + q''' + \ldots = q + q''' + q'' + q' + \ldots \quad (b.\ 26)$$

Wegen der Gleichung (a. 2) wird auch die nachstehende Gleichung einleuchtend sein

$$q + q' + q'' + q''' + \ldots = q + q' + (q'' + q''' + \ldots) \quad (b.\ 27)$$

Die Summe zweier willkürlichen Quaternionen $q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$ und $q' = \mathrm{OB}' : \mathrm{OA}'$ sei so verstanden:

Wenn die Quaternionen q und q' in verschiedenen Ebenen (d. h. in nicht parallelen Ebenen) enthalten sind, so kann man die beiden Nenner der Quaternionen nach der diesen Ebenen gemeinsamen Geraden überbringen, indem man nach Art. 29 die beiden Vektoren eines jeden der Quaternionen so lange dreht, bis die Nenner in jene Durchschnittsgerade der Ebenen zusammenfallen.

Nach demselben Artikel können nachher die Tensoren der beiden der Richtung nach zusammenfallenden Nenner einander gleich gemacht werden, indem man auch den Tensor des Zählers eines jeden der Quaternionen in demselben Verhältnisse ändert,

in welchem der Nenner dieses Quaternions eine Änderung erfahren hat.

Es sind dadurch die beiden Quaternionen auf einen gemeinsamen Nenner reducirt und die Summe kann nunmehr nachdem Anfang dieses Artikels bestimmt werden.

Wenn die beiden gegebenen Quaternionen in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen wirken, so kann jeder in einer dieser Ebenen enthaltene Vektor zum gemeinsamen Nenner gewählt und nach der Reduction der beiden Quaternionen auf diesen Nenner die Summe unmittelbar bestimmt werden.

Auch die Summe zweier willkürlichen Quaternionen ist hiernach commutativ.

Der Ausdruck $q+q'+q''+q'''+\ldots$, in welchem $q, q', q'', q''', \ldots$ willkürliche Quaternionen bedeuten, gibt zu erkennen, dass zu dem Quaternion $q+q'$ der andere q'' addirt werden soll, nachher zum Quaternion $q+q'+q''$ der andere q''' u. s. w.

Es können nicht mehr als zwei willkürliche Quaternionen zugleich auf denselben Nenner reducirt werden, weil drei Ebenen im allgemeinen nicht eine gemeinsame Gerade enthalten.

Im Art. 71 wird der Studirende einen einfachen Beweis finden, dass auch bei der Summe mehrerer willkürlichen Quaternionen das commutative und das associative Princip gültig bleiben, daher wir hier nicht länger dabei verweilen wollen.

38. Es können leicht mit Hülfe des vorigen Artikels einige weiteren Sätze bewiesen werden:

1°. $$q+(-q)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\ 28)$$

Denn es ist

$$q+(-q)=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}+\left(-\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right)=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}+\frac{-\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \text{ nach } (b.\ 15)=$$

$$=\frac{\mathrm{OB}+(-\mathrm{OB})}{\mathrm{OA}} \text{ nach } (b.\ 25)=0 \text{ nach } (a.\ 13).$$

2°. $$xq+yq=(x+y)q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\ 29)$$

Denn man erhält

$$xq+yq=x\frac{\beta}{\alpha}+y\frac{\beta}{\alpha}=\frac{x\beta}{\alpha}+\frac{y\beta}{\alpha} \text{ nach } (b.\ 15)=\frac{x\beta+y\beta}{\alpha} \text{ nach } (b.\ 25)=$$

$$=\frac{(x+y)\beta}{\alpha} \text{ nach } (a.\ 9)=(x+y)\frac{\beta}{\alpha} \text{ nach } (b.\ 15).$$

3⁰. Allgemeiner erhält man in derselben Weise:

$$xq + yq + zq + \ldots . = (x + y + z + \ldots .)\, q \,. \quad (b.\, 29^*)$$

$$\left.\begin{array}{l}(x + y + z + \ldots .)\, q = (x + z + y + \ldots .)\, q \\ (x + y + z + \ldots .)\, q = [x + (y + z) + \ldots .]\, q\end{array}\right\} . \quad (b.\, 29^{**})$$

4⁰. $xq + xq' = x\frac{\beta}{\alpha} + x\frac{\beta'}{\alpha} = \frac{x\beta}{\alpha} + \frac{x\beta'}{\alpha} = \frac{x\beta + x\beta'}{\alpha} =$

$$= \frac{x(\beta + \beta')}{\alpha} \text{ nach } (a.\, 10) = x\frac{\beta + \beta'}{\alpha} = x(q + q').$$

Oder kürzer

$$xq + xq' = (q + q') \ldots \ldots \ldots \; (b.\, 30)$$

Wenn zwei Quaternionen q und q' einander gleich sind, und auch $q'' = q'''$, so wird daraus geschlossen werden können

$$q + q'' = q' + q'''.$$

Dieser Satz kann als unmittelbare Folge des zweiten Grundsatzes im Art. 3 betrachtet oder auch auf geometrischem Wege bewiesen werden. Wir überlassen indessen dieses letztere dem Studirenden.

39. Die Differenz zweier Quaternionen q und q' definiren wir durch die Gleichung

$$q - q' = q + (-q') \ldots \ldots \ldots \; (b.\, 31)$$

Sind die beiden Quaternionen anf den nämlichen Nenner reducirt, also

$$q = \beta : \alpha, \; q' = \beta' : \alpha,$$

so ist

$$q - q' = q + (-q') = \frac{\beta}{\alpha} + \left(-\frac{\beta'}{\alpha}\right) = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{-\beta'}{\alpha} =$$

$$= \frac{\beta + (-\beta')}{\alpha} \text{ nach } (b.\, 25) = \frac{\beta - \beta'}{\alpha} \text{ nach } (a.\, 14). \quad (b.\, 32)$$

Es ist daher die Differenz zweier Quaternionen ein neuer Quaternion.

In gleicher Weise, wie in Art. 14 für Vektoren bewiesen ist, kann man auch hier zeigen, dass die Differenz zweier Quaternionen zu dem Subtrahendus addirt, den Minuendus ergibt.

Ebenso ergibt sich, wie in Art. 14, dass die Differenzen zweier einander gleichen Quaternionen mit zwei anderen gleichen Quaternionen, wieder einander gleich sein müssen.

Aus der Definition ($b.$ 31) kann wie in dem schon mehrmals

genannten Artikel die Commutativität der einzelnen Glieder bei der Addition und der Subtraction hergeleitet werden.

Es ist weiter

$$-(q+q')=-q-q' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,33)$$

Denn

$$-(q+q')=-\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta'}{\alpha}\right)=-\frac{\beta+\beta'}{\alpha}=\frac{-(\beta+\beta')}{\alpha}=$$

$$=\frac{-\beta-\beta'}{\alpha} \text{ nach } (a.\,17)=\frac{-\beta}{\alpha}-\frac{\beta'}{\alpha} \text{ nach } (b.\,32)=$$

$$=-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta'}{\alpha}=-q-q'.$$

Die Verallgemeinerung lautet sodann wieder

$$-(q+q'+q'')=-\{(q+q')+q'\}=-(q+q')-q''=-q-q'-q'' \quad (b.34)$$

und

$$-(q-q'-q''+q''')=-[q+(-q')+(-q'')+q'''], \text{ nach } (b.\,31),$$
$$=-q-(-q')-(-q'')-q''', \text{ nach } (b.\,34),$$
$$=-q+\{-(-q')\}+\{-(-q'')\}-q''', \text{nach} (b.31)$$

oder

$$-(q-q'-q''+q''')=-q+q'+q''-q''', \text{ nach } (b.\,19) \ldots (b.\,35)$$

Wie die Gleichungen $(a.\,19)$, $(a.\,20)$ können weiter die nachstehenden bewiesen werden.

$$q+q'-q''-q'''+q^{\text{IV}}=q+(q'-q''-q'''+q^{\text{IV}}) \ldots (b.\,36)$$
$$q+q'-q''-q'''+q^{\text{IV}}=q+q'-(q''+q'''-q^{\text{IV}}) \ldots (b.\,37)$$

Noch wird

$$x(-q)=-xq \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,38)$$

Denn

$$x(-q)=x\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=x\frac{-\beta}{\alpha}=\frac{x(-\beta)}{\alpha} \text{ nach } (b.\,15)=$$

$$=\frac{-x\beta}{\alpha} \text{ nach } (a.\,21)=-\frac{x\beta}{\alpha}=-x\frac{\beta}{\alpha}=-xq.$$

Weiter

$$x(q-q'+q'')=xq-xq'+xq'' \quad \ldots\ldots \quad (b.\,39)$$

weil

$$x(q-q'+q'')=x[q+(-q')+xq'']=xq+x(-q')+xq''=$$
$$=xq+(-xq')+xq''=xq-xq'+xq''.$$

Schlieszlich

$$(x-y+z)\,q=xq-yq+zq \quad \ldots\ldots \quad (b.\,40)$$

Man hat nämlich die Transformationen

$$(x-y+z)\,q=(x-y+z)\frac{\beta}{\alpha}=\frac{(x-y+z)\,\beta}{\alpha}=$$

$$=\frac{x\beta-y\beta+z\beta}{\alpha}\text{ nach }(a.\,23)=\frac{x\beta}{\alpha}-\frac{y\beta}{\alpha}+\frac{z\beta}{\alpha}=$$

$$=x\frac{\beta}{\alpha}-y\frac{\beta}{\alpha}+z\frac{\beta}{\alpha}=xq-yq+zq.$$

Es sind alle diese Formeln analog den in der Arithmetik gültigen Relationen. Wir wenden uns jetzt aber einigen speciell hierher gehörigen Formeln zu.

40. Wenn wir die Figur 23 nehmen, so finden wir

$$N(q+q')=[T(q+q')]^2=\left(T\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}\right)^2=\frac{(T.\mathrm{OC})^2}{(T.\mathrm{OA})^2}=$$

$$=\frac{(T.\mathrm{OB})^2+(T.\mathrm{OB}')^2+2\,(T.\mathrm{OB})\,(T.\mathrm{OB}')\cos\angle\mathrm{B'OB}}{(T.\,\mathrm{OA})^2}=$$

$$=\left(T\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right)^2+\left(T\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}}\right)^2+2\left(T\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right)\left(T\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}}\right)\cos\angle\mathrm{B'OB}$$

oder

$$N(q+q')=Nq+Nq'+2\,Tq\;Tq'\cos\angle\mathrm{B'OB}.\quad(b.\,41)$$

Fig. 23

Es lässt sich hieraus unmittelbar schlieszen, dass

$$N(q+q')\text{ und }Nq+Nq'$$

nur in dem Falle einander gleich kommen, wenn

$$\cos\angle\mathrm{B'OB}=0,$$

d. h. wenn

$$\angle\mathrm{B'OB}=\frac{\pi}{2}.$$

Es ist weiter $T(q+q')$ nur dann gleich $Tq+Tq'$, wenn $\cos\angle\mathrm{B'OB}=1$, d. h. wenn die Quaternionen q und q' nur an Tensor verschieden sind, oder wenn $q'=xq$ (x sei ein positiver Skalar) geschrieben werden kann.

Es ist endlich $T(q+q')=Tq-Tq'$ wenn $\cos\angle\mathrm{B'OB}=-1$, d. h. wenn $q'=-xq$ ist.

Es ist leicht zu beweisen, dass im allgemeinen auch nicht $U(q+q')$ dem Symbol $Uq+Uq'$ gleich sein kann.

Wenn wir nämlich in der Figur 23 um O als Mittelpunkt eine Kugel mit der Längeneinheit als Radius beschreiben, welche die Geraden OA, OB, OC, OB′ in A_1, B_1, C_1, B_1' bzhw. schneide, so ist

$$Uq = OB_1 : OA_1,$$
$$Uq' = OB_1' : OA_1,$$
$$U(q + q') = OC_1 : OA_1.$$

Wenn wir weiter das Parallelogramm $OB_1C'B_1'$ beschreiben, so wird

$$Uq + Uq' = OC' : OA_1.$$

Im allgemeinen ist dieser Ausdruck nicht einmal ein Versor. Es kann deshalb nur dann

$$Uq + Uq' = U(q + q')$$

sein, wenn OC und OC′ der Richtung nach zusammenfallen, und wenn

$$T.OC' = 1.$$

Die letztere Bedingung erfordert, weil sodann

$$T.OC' = T.OB_1 = T.B_1C'$$

dass der Winkel $B_1'OB = \frac{2}{3}\pi$ sei, und die erstere Bedingung erfordert, dass

$$T.OB = T.OB' \text{ oder } Tq = Tq'.$$

Wir erhalten deshalb den Satz:

Nur wenn $Tq = Tq'$ und wenn nach der Reduction auf gleichem Nenner die Zähler der Quaternionen einen Winkel von 120° einschlieszen, kann

$$U(q + q') = Uq + Uq'$$

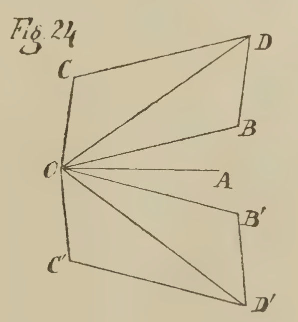
sein.

Analoge Betrachtungen sind auf $T(q - q')$ und $U(q - q')$ anwendbar.

Gehen wir nunmehr zu $K(q + q')$ über. Es gilt der Satz:

$$K(q + q') = Kq + Kq' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 42)$$

Dies zu beweisen, setzen wir voraus, es sei in der Figur 24



$$q = OB : OA,$$
$$q' = OC : OA,$$
$$Kq = OB' : OA,$$
$$Kq' = OC' : OA.$$

Construirt man die beiden Parallelogramme

OBDC und OB′D′C′

so ist

$$q + q' = \mathrm{OD} : \mathrm{OA}$$

und es ist ein Leichtes zu zeigen, dass

$$K(q + q') = \mathrm{OD}' : \mathrm{OA}.$$

Die dreiseitigen körperlichen Ecken OABC, OA′B′C′ sind nämlich congruent, weil den Voraussetzungen gemäss

$$\angle \mathrm{BOA} = \angle \mathrm{B'OA}, \ \angle \mathrm{COA} = \angle \mathrm{C'OA},$$

während der Winkel zwischen den Ebenen COA, BOA der Scheitelwinkel desjenigen zwischen den Ebenen C′OA, B′OA ist. Es sind deshalb die Neigungswinkel auf den Seiten OB, OB′ einander gleich und $\angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{B'OC'}$.

Dadurch werden die dreiseitigen körperlichen Ecken OABD, OA′B′D′ congruent ($\angle \mathrm{BOA} = \angle \mathrm{B'OA}$, $\angle \mathrm{DOB} = \angle \mathrm{D'OB}$, weil die Parallelogramme OBCD, OB′C′D′ congruent sind, und der Neigungswinkel auf OB = demjenigen auf OB′). In denselben sind deshalb die Winkel zwischen den Ebenen DOA, AOB und zwischen D′OA, AOB′ einander gleich und hieraus folgt, dass D′O in der Ebene DOA liegt. In den letzeren congruenten körperlichen Ecken ist ausserdem $\angle \mathrm{DOA} = \angle \mathrm{D'OA}$, wodurch wirklich $\mathrm{OD'} : \mathrm{OA} = K(q + q')$ ist. Es ist nunmehr

$$K(q + q') = \frac{\mathrm{OD'}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB'} + \mathrm{OC'}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OA}} = Kq + Kq'.$$

Hieraus kann man leicht herleiten

$$K(q - q') = Kq - Kq' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b.\ 43)$$

Denn es wird

$$K(q - q') = K\{q + (-q')\} \text{ nach } (b.\ 31) = Kq + K(-q') \text{ nach } (b.\ 42) =$$
$$= Kq + (-Kq') \text{ nach } (b.\ 21) = Kq - Kq' \text{ nach } (b.\ 31).$$

Allgemeiner folgt aus (b. 42) und (b. 43)

$$K(q - q' - q'' + q''' + \ldots) = Kq - Kq' - Kq'' + Kq''' + \ldots \quad (b.\ 44)$$

41. Wenn an einem Vektor α erst die Operation q und an dem dadurch entstandenen Vektor nachher die Operation q' vollzogen werden soll, so schreibt man dafür $q'q\alpha$ (bisweilen auch $q'.q\alpha$) und sagt, dass an den Vektor α der Operator $q'q$ wirkt.

Derselbe wird das Produkt des Quaternions q *mit* q' genannt, oder auch das Produkt des Quaternions q' *durch* q.

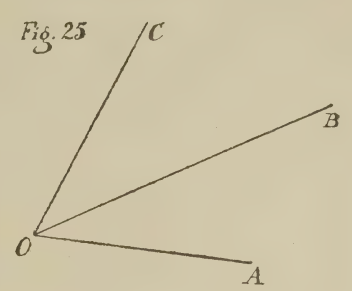
Und man pflegt zu sagen, dass in diesem Falle q *mit* q' und q' *durch* q multiplicirt ist. Den zuletzt operirenden Quaternion

wollen wir den Multiplicator, den zuerst operirenden den Multiplicandus nennen.

Es seien q und q' ganz willkürlich gegeben. Man kann sodann stets die Durchschnittsgerade der Ebenen dieser Quaternionen bestimmen und den Quaternion q so lange in seiner Ebene drehen, bis dessen Zähler längs dieser Durchschnittsgeraden fällt. Es sei sodann

$$q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$$

in der Figur 25, wo OB die Richtung der den Ebenen der Quaternionen q und q' gemeinsamen Geraden ist.



In gleicher Weise kann man q' solange in seiner Ebene drehen, bis dessen Divisor mit OB der Richtung nach zusammenfällt; nachher kann man den Tensor des Nenners des Quaternions q' auf $T.$OB bringen. Es werde dadurch

$$q' = \mathrm{OC} : \mathrm{OB}.$$

Der Operator $q'q$ führt somit erst OA nach OB und nachher OB nach OC über. Das Resultat ist deshalb

$$q'q = \mathrm{OC} : \mathrm{OA}.$$

Wir ersehen hieraus, dass das Produkt zweier Quaternionen im allgemeinen ein neuer Quaternion ist. In diesem Sinne aufgefasst, schreibt man bisweilen anstatt des Operators $q'q$ auch $(q'q)$.

Hat man im allgemeinen dem Obigen gemäss q und q' so gestellt, dass $q = \frac{\beta}{\alpha}$, $q' = \frac{\gamma}{\beta}$, so wird die Formel gelten:

$$q'q = \frac{\gamma}{\beta}\,\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 45)$$

42. Es ist augenscheinlich, dass dasselbe Resultat erhalten werden muss, welches mit $q'q$ erhalten wird, wenn man jeden der beiden Quaternionen in Versor und Tensor zergliedert und die vier so entstandenen Operationen in solcher Reihenfolge ausführt, dass zuerst die Drehungen, nachher die Verlängerungen stattfinden. Man kann deshalb schreiben:

$$q'q = (Tq'\ Uq')(Tq\ Uq) = Tq'\,Uq'\ Tq\ Uq = Tq'\ Tq\ Uq'\ Uq \quad (b.\ 46)$$

Es ist hieraus ersichtlich, dass die in $q'q$ enthaltene Drehung durch das Operationszeichen $Uq'\ Uq$, die Verlängerung durch $Tq'\ Tq$ bewirkt wird oder in Formeln

$$T.q'q = Tq'\ Tq = Tq\ Tq' \text{ und } U.q'q = Uq'\ Uq. \quad . \ (b.\ 47)$$

wo $T.q'q$ und $U.q'q$ statt $T(q'q)$, $U(q'q)$ geschrieben wird.

Es ist besonders der Beachtung wert, dass die Reihenfolge der Drehungen nicht umgekehrt werden darf, wie wir bald beweisen werden, während die Reihenfolge der Dilatationen nach dem Vorhergehenden abgeändert werden kann.

Ein anderer Beweis der Formeln ($b.$ 47) ist der nachstehende. In der Figur 23 ist

$$T.q'q = T.\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{T.\mathrm{OC}}{T.\mathrm{OB}}\,\frac{T.\mathrm{OB}}{T.\mathrm{OA}} = \left(T.\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}\right)\left(T.\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right) = Tq'.Tq.$$

$$U.q'q = U.\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{U.\mathrm{OC}}{U.\mathrm{OA}} \text{ nach } (b.\ 3^*) = \frac{U.\mathrm{OC}}{U.\mathrm{OB}}\,\frac{U.\mathrm{OB}}{U.\mathrm{OA}} \text{ nach } (b.\ 45) =$$

$$= \left(U.\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}\right)\left(U.\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right) = Uq'\ Uq.$$

Weil

$$Tq'q = Tq'\ Tq = Tq\ Tq' = Tqq'$$

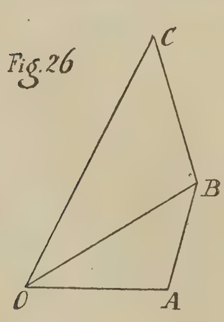
so gilt die einfache Formel

$$Tq'q = Tqq' \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (b.\ 48)$$

Weil aber $Uq'\ Uq$ nicht $Uq\ Uq'$ gleich kommt, so ist

$$Uqq' \gtrless Uq'q.$$

43. Wenn die Quaternionen q' und q einander gleich sind, so wollen wir qq durch q^2 ersetzen, und sagen der Quaternion q sei mit zwei potenzirt.



Die geometrische Bedeutung des Symbols q^2 ist leicht zu veranschaulichen. Es sei in der Figur 26

$$q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}.$$

Construirt man in derselben Ebene auf OB das Dreieck OBC ∽ △ OAB, so ist

$$\mathrm{OC} : \mathrm{OB} = \mathrm{OB} : \mathrm{OA} = q$$

und

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}\,\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = qq = q^2.$$

Statt $T(q^2)$ wollen wir $T.q^2$ schreiben. Nach (b. 47) wird sodann

$$\left.\begin{array}{l} T.q^2 = (Tq)^2 = Tq^2 = Nq \text{ nach } (b.\ 7) \\ U.q^2 = (Uq)^2 = Uq^2 \end{array}\right\} \quad \ldots (b.\ 49)$$

wobei die letztere Gleichung zugleich aussagt, dass wir bei $(Uq)^2$ die Klammern fortlassen wollen.

Ein weiterer besonderer Fall ist derjenige, dass q' und q reciprok zu einander sind. Es ist sodann

$$q\frac{1}{q} = \frac{OB}{OA}\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OB} = 1 \text{ und } \frac{1}{q}q = \frac{OA}{OB}\frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OA} = 1 \quad .\ (b.\ 50)$$

Setzen wir voraus, dass $q = Kq'$. Es wird sodann

$$q'Kq' = Tq'\ TKq'\ Uq'\ UKq' \text{ nach } (b.\ 46) =$$

$$= Tq'\ Tq'\ Uq'\frac{1}{Uq'} \text{ nach } (b.\ 10). = (Tq')^2 \text{ nach } (b.\ 50)$$

oder kürzer

$$qKq = Tq^2 = Nq \ldots\ldots\ldots (b.\ 51)$$

Ebenso findet man

$$(Kq)q = Nq.$$

44. Wenn nach der Vollziehung de Operation $q'q$ noch ein Skalar x wirkt, so wollen wir dies schreiben $xq'q$. Wir werden nun die nachstehenden Sätze beweisen

$$xq'q = (xq')q = q'(xq) = q'qx \ldots\ldots (b.\ 52)$$

Denn wenn wir wieder die Figur 25 betrachten, so ist

$$xq'q = x\frac{OC}{OA} = \frac{x.OC}{OA} = \frac{x.OC}{OB}\frac{OB}{OA} = \left(x\frac{OC}{OB}\right)\frac{OB}{OA} = (xq')q$$

$$xq'q = x\frac{OC}{OA} = \frac{x.OC}{OA} = \frac{x.OC}{x.OB}\frac{x.OB}{OA} = \frac{OC}{OB}\frac{x.OB}{OA} \text{ nach Art. 29} =$$

$$= \frac{OC}{OB}\left(x\frac{OB}{OA}\right) = q'(xq)$$

$$xq'q = x(q'q) = (q'q)x \text{ nach } (b.\ 18^*) = q'qx.$$

45. Wir wollen jetzt die Aufeinanderfolge der Operationen $\frac{1}{q'}$ und $\frac{1}{q}$ näher ins Auge fassen und dadurch die Formel nachweisen

$$\frac{1}{q'q} = \frac{1}{q}\frac{1}{q'} \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\ 53)$$

Es sei $q = \frac{\beta}{\alpha}$, $q' = \frac{\gamma}{\beta}$, so hat man auch $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{1}{q'} = \frac{\beta}{\gamma}$, und $q'q = \frac{\gamma}{\alpha}$. Es wird deshalb

$$\frac{1}{q}\frac{1}{q'} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{1}{\frac{\gamma}{\beta}\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{1}{q'q}$$

womit der Beweis geliefert ist.

Wir können aber den Studirenden nicht genug darauf aufmerksam machen diesen Beweis, so wie die vorangegangenen und nachfolgenden, wie nachstehend zu lesen:

Es führe q den Vektor α in β, q' den Vektor β in γ über, so wird $\frac{1}{q}$ den Vektor β in α und $\frac{1}{q'}$ den Vektor γ in β überführen und auch wird $q'q$ den Übergang von α nach γ vollziehen. Man kann hieraus schlieszen, dass $\frac{1}{q}\frac{1}{q'}$ zuerst die Überführung von γ in β und nachher von β in α vermittelt, d. h. auch die Überführung von γ in α. Dasselbe tut aber auch $\frac{1}{q'q}$ und somit ist $\frac{1}{q'q} = \frac{1}{q}\frac{1}{q'}$.

Eine einfache, sehr wichtige Formel ergibt sich bei der Betrachtung von $K.q'q$, einen Ausdruck, den wir wieder der Kürze halber statt $K(q'q)$ setzen. Es ist nämlich

$$K.q'q = \frac{T.q'q}{U.q'q} \text{ nach } (b.\,24) = \frac{Tq'\,Tq}{Uq'\,Uq} \text{ nach } (b.\,47) =$$

$$= Tq'\,Tq\,\frac{1}{Uq'\,Uq} \text{ nach } (b.\,23) = Tq'\,Tq\,\frac{1}{Uq}\,\frac{1}{Uq'} \text{ nach } (b.\,53) =$$

$$= \frac{Tq}{Uq}\,\frac{Tq'}{Uq'} \text{ nach } (b.\,52) = Kq.Kq' \text{ nach } (b.\,24).$$

oder kürzer

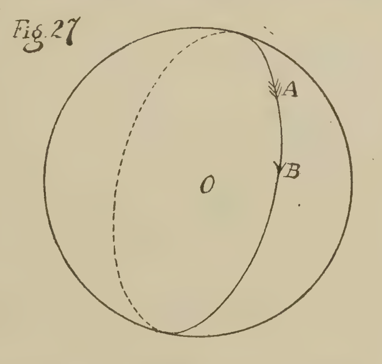
$$K.q'q = Kq.Kq' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,54)$$

46. Es gibt eine sehr einfache Darstellungsweise des Versors eines Quaternions, die wir im Folgenden mehrmals bedürfen werden, und die wir deshalb hier kurz erwähnen wollen.

Wenn ein Quaternion q gegeben ist, $q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$, so kann man stets aus dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte O der

beiden Vektoren eine Kugel beschreiben mit einem Radius, dessen Länge der Längeneinheit gleich kommt. Eine solche Kugel wollen wir eine Einheitskugel nennen. Dieselbe schneide die Vektoren OA und OB in den Punkten A_1 und B_1. Wenn wir sodann einen gröszten Kreis durch A_1 und B_1 bringen, so wird der Punkt A_1 des Vektors OA, bei der Drehung nach OB, den Bogen A_1B_1 dieses gröszten Kreises beschreiben und der Versor des Quaternions ist bekannt, sobald dieser Bogen gezeichnet vorliegt, weil sodann unmittelbar $Ax.q$ und $\angle q$ gefunden werden können. Man sagt deshalb der Bogen A_1B_1 stelle den Versor des Quaternions OB : OA dar und man nennt diesen Bogen den Versorbogen A_1B_1.

Damit $Ax.q$ unzweideutig aus diesem Versorbogen hergeleitet werden kann, ist notwendig, dass die Richtung bezeichnet werde, nach welcher die Drehung den Bogen entlang erfolgt, und dieselbe werde im Folgenden durch einen dem Bogen hinzugefügten Pfeil oder durch die Reihenfolge der Buchstaben erkannt. Es ist deshalb der Versorbogen AB verschieden von BA.



Wenn z. B. in der Figur 27 der Versorbogen AB gegeben ist, so errichte man im Mittelpunkte O der Kugel eine Senkrechte zur Ebene des grözsten Kreises AB nach beiden Seiten hin und stelle sich an *die* Seite der Ebene, von welcher aus gesehen der Pfeil in positiver Richtung (entgegengesetzt der Bewegung der Zeiger einer Uhr) rundläuft. Jeder Punkt auf der Einheitskugeloberfläche bezeichnet einen Einheitsvektor, nämlich denjenigen, aus O nach diesem Punkte gezogen.

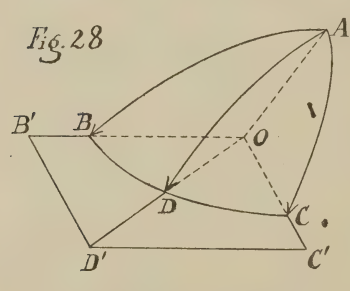
Zwei Versorbogen auf der nämlichen Kugeloberfläche sind einander gleich, wenn dieselben gleiche und in gleicher Richtung durchlaufene Theile eines gröszten Kreises sind. Im Folgenden werden wir den Versorbogen AB mit $\widehat{AB}$ bezeichnen.

47. Mit Hülfe der Versorbogen wollen wir uns jetzt den

Versor der Summe und des Produktes zweier willkürlichen Quaternionen veranschaulichen.

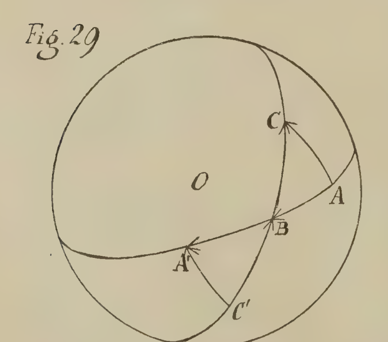
Auf der Oberfläche der Einheitskugel um O sei der Bogen $AB = Uq$, $AC = Uq'$, so führt q einen Vektor aus der Richtung OA nach der Richtung OB über, und ebenso vollzieht q' die Überführung eines Vektors aus der Richtung OA nach der Richtung OC. Wenn die gegebenen Versorbogen nicht von einem Punkte ausgehen, so kann man dieselben längs der grösten Kreise, von denen sie Teile sind, bewegen lassen, bis einer der Schnittpunkte der grösten Kreise der gemeinschaftliche Anfangspunkt der Bogen wird.

Wenn $q = OB' : OA$ und $q' = OC' : OA$ so wird $q + q' = OD' : OA$, wobei OD′ ein Diagonal des Parallelogramms ist, auf OB′ und OC′ beschrieben. Die Gerade OD′ liegt somit in der Ebene B′OC′, und diese Ebene ist dieselbe wie die Ebene BOC; es folgt hieraus, dass OD′ den Bogen BC des grösten Kreises durch B und C schneiden muss, z. B. in D. Der Bogen AD wird somit $U(q + q')$ darstellen.



Die Lage des Punktes D in BC ist, wie unmittelbar ersichtlich, von der Grösze der Tensoren von q und q' wesentlich abhängig. Nur wenn $Tq = Tq'$, fällt D in die Mitte des Bogens BC.

Wie wir vorher sahen, (Art. 38) ist $Uq + Uq'$ im allgemeinen nicht ein Versor und es kann dieser Ausdruck deshalb auch nicht als Versorbogen dargestellt werden.



Wir wenden uns jetzt zur Darstellung von $Uq'q$ und Uqq' (Fig. 29) und werden dadurch den wichtigen Satz erhalten, dass im allgemeinen

$$U.q'q \gtrless U.qq' \quad (b. 55)$$

oder $$Uq'Uq \gtrless UqUq'.$$

Es führe Uq den Vektor OA nach OB über und Uq' den Vektor OB nach OC, so wird $Uq'Uq$ OA nach OC bringen, oder: wenn $Uq = \widehat{AB}$, $Uq' = \widehat{BC}$, so ist

$$Uq'Uq = \widehat{AC}.$$

Nehmen wir $\widehat{C'B} = \widehat{BC}$ und $\widehat{BA'} = \widehat{AB}$, so kann auch leicht die Operation $Uq\,Uq'$ dargestellt werden. Denn Uq' führt sodann OC′ nach OB, Uq weiter OB nach OA′, sodass $Uq\,Uq'$ den Vektor OC′ nach OA′ führt, oder kürzer

$$Uq\,Uq' = \widehat{C'A'}.$$

Es ist nunmehr unmittelbar ersichtlich, dass $\widehat{C'A'}$ und $\widehat{AC}$ nicht Bogen eines einzigen grösten Kreises sein können; denn enthielte der gröszte Kreis, durch C und C′ gebracht, auch A und A′, so würde der Bogen AA′ den grösten Kreis CC′ entlang fallen d. h. es würden die gegebenen Quaternionen in derselben Ebene operiren, ein Ergebnis, das mit der Voraussetzung, q und q' seien willkürlich, streitig ist.

Nach Art. 44 muss somit $\widehat{AC} \gtrless \widehat{C'A'}$ sein, und deshalb auch $Uq'\,Uq \gtrless Uq\,Uq'$.

Weil die sphaerischen Dreiecke BAC und BA′C′ congruent sind, so stimmen die Bogen AC und C′A′ wohl an Grösze überein.

Man kann somit allgemein sagen:

$$\angle\, U.q'q = \angle\, U.qq', \text{ aber } Ax.U.q'q \gtrless Ax.U.qq' \quad . \; . \; (b. 56)$$

Und weil die Tensoren an die Drehungen nichts ändern können, so ist auch

$$\angle\, q'q = \angle\, qq' \text{ und } Ax.\,q'q \gtrless Ax.\,qq' \; . \; . \; . \; . \; . \; (b. 57)$$

Hiermit ist zugleich gezeigt, dass

$$qq' \gtrless q'q$$

oder in Worten der wichtige Satz:

Die Multiplikation zweier Quaternionen ist in Bezug auf die Faktoren *nicht* commutativ.

Wenn jedoch die Quaternionen q und q' in einer und derselben Ebene wirken, oder complanar sind, so können die Faktoren des Produktes mit einander umgetauscht werden, oder kurz:

Wenn $q \,|||\, q'$[1], so ist $qq' = q'q$ . . . . (b. 58)

Dieser Satz ist aus dem Vorigen und der Figur 27 zu entnehmen; man ersieht ausserdem, dass in diesem Falle
$Ax.(qq') = Ax.q = Ax.q' = Ax.(q'q), \angle(qq') = \angle q + \angle q' = \angle(q'q)$.

Haben wir in dieser Weise gezeigt, dass im allgemeinen Ungleichheit besteht zwischen qq' und $q'q$, so kann man auch schlieszen, dass

$$\frac{\beta}{\alpha}\frac{\gamma}{\beta} \gtrless \frac{\gamma}{\alpha}$$

sein muss, weil nach der Definition

$$\frac{\gamma}{\beta}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

ist. Wir richten die besondere Aufmerksamkeit des Studirenden auf dieses Ergebnis.

48. Wenn die Multiplikation zweier Quaternionen eine nicht commutative Operation ist, so muss bei drei und mehr Factoren dasselbe gelten. Dabei wird allgemein unter $qq'q''q'''$ verstanden, dass an einen Vektor erst der Quaternion q''' operirt, sodann an den resultirenden Vektor q'', nachher an den neuen Vektor q' und schlieszlich q an das zuletzt erhaltene Resultat. Ganz anders als mit dem commutativen Princip, verhält es sich mit dem associativen.

Beschränken wir uns zunächst auf Produkte, welche aus drei Faktoren bestehen, z. B. $qq'q''$. Der Bedeutung nach ist dieser Ausdruck identisch mit $q(q'q'')$.

Wir wollen nun weiter zeigen, dass auch die Gleichung gilt

$$qq'q'' = (qq')q'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\ 59)$$

d. h. dass man gleich gut mit dem Operator q auf das Symbol $q'q''$, als mit dem Operator (qq') auf das Symbol q'' operiren kann.

Weil

$$qq'q'' = q\,(Tq'Tq''Uq'Uq'') \text{ nach } (b.\ 46) =$$
$$= Tq'Tq''q(Uq'Uq'') \text{ nach } (b.\ 52) =$$
$$= Tq'Tq''Tq\ UqUq'Uq''$$

und

$$(qq')q'' = (TqTq'\ UqUq')q'' \text{ nach } (b.\ 46) =$$

1) Das Zeichen $|||$ druckt nach HAMILTON die Complanarität von Vektoren oder Quaternionen aus.

$$= TqTq'(UqUq')q'' \text{ nach } (b. 52) =$$
$$= TqTq'(UqUq')Tq''Uq'' \text{ nach } (b. 5) =$$
$$= TqTq'Tq''(UqUq')Uq'' \text{ nach } (b. 52),$$

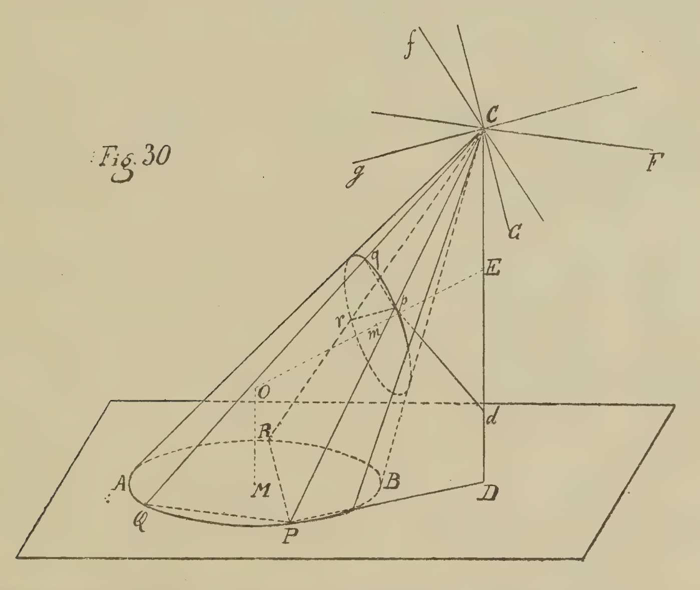
während die Tensorfaktoren nach dem Vorhergehenden (b. 18**) commutativ sind, so haben wir nur zu zeigen, dass

$$UqUq'Uq'' = (UqUq')Uq'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b. 60)$$

und dieser Beweis ist von Hamilton mit Hülfe einiger Eigenschaften der sphaerischen Kegelschnitte gegeben worden.

Wir wollen deshalb den Beweis dieser Eigenschaften voranschicken.

49. Es sei in der Figur 30 der Kreis M die Grundfläche



eines schiefen Kegels, dessen Scheitel in C liege.

Ziehen wir aus C die Seitenlinien des Kegels, z. B. CP und bestimmen wir auf diesen Geraden Punkte p, die der Relation

$$\text{CP}.\text{C}p = \text{constant} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b. 61)$$

Genüge leisten, so ist der Ort der Punkte p leicht zu finden.

Wenn wir nämlich das Lot CD auf die Ebene der Grundfläche des Kegels fallen lassen, und in der Ebene PCD aus p eine Senkrechte zu CP errichten, welche CD in d schneide,

so ist $\triangle Cpd \backsim \triangle CPD$, und dadurch $Cp : CD = Cd : CP$ oder in Verbindung mit (b. 61)

$$CD.Cd = \text{constant}.$$

Wenn der Punkt P den Kreis M entlang sich bewegt, so ändert sich auch die Stelle des Punktes p; es bleibt jedoch der Schnittpunkt von CD mit der Senkrechten pd zu CP ungeändert, woraus unmittelbar sich folgern lässt, dass der Punkt p auf der Oberfläche einer Kugel sich bewegt, deren Durchmesser Cd, deren Mittelpunkt deshalb die Mitte E von Cd ist.

Denken wir uns weiter eine Kugel O, auf welcher der Kreis M ein kleiner Kreis ist und die durch einen der Punkte p geht, so muss die Kugeloberfläche auch alle anderen Punkte p enthalten, weil für alle Punkte dieser Kugelfläche

$$CP.Cp = \text{Constant}.$$

Der Ort der Punkte p ist deshalb der Durchschnitt der beiden Kugeln O und E, somit ein Kreis m, welcher auf der Kegelfläche liegt.

Natürlich ist jeder Schnitt parallel diesem Kreise m ebenfalls ein Kreis, und somit ist der Satz bewiesen:

Bei jedem schiefen kreisförmigen Kegel sind zwei Reihen paralleler kreisförmiger Durchschnitte vorhanden.

Wenn man durch den Scheitel C zwei Ebenen anbringt, parallel diesen zweien Reihen kreisförmiger Durschschnitte, so werden dieselben die cyclischen Ebenen des Kegels genannt.

Wir denken zwei neue Seitenlinien CQ und CR des Kegels gezogen und die Ebenen CPQ und CPR angebracht; CQ und CR mögen den kreisförmigen Durchschnitt durch p in q und r bzhw. schneiden.

Es seien CF und Cf die Durchschnittslinien der Ebene CPQ mit den beiden cyclischen Ebenen; dieselben sind, wie unmittelbar einleuchtend, parallel zu PQ und pq bzhw.

Weil $PQpq$ ein in einem Kreise beschriebenes Viereck ist (es liegen nämlich die Punkte $PQpq$ auf einer Kugel und in einer Ebene) so ist

$$\angle Cqp = \angle CPQ$$

und man kann dann weiter erhalten

$$\angle Cqp = \angle QCf, \ \angle CPQ = \angle PCF$$

und hierdurch

$$\angle QCf = \angle PCF \ldots\ldots\ldots (b. 62)$$

Wenn in gleicher Weise CG und Cg die Durchschnittsgeraden der Ebene CPR mit den beiden cyclischen Ebenen sind, sodass

$$CG \,//\, PR \text{ und } Cg \,//\, pr$$

so ist, wie bei der vorigen Gleichung

$$\angle RCg = \angle PCG \ldots\ldots\ldots (b. 62^*)$$

Auch ist

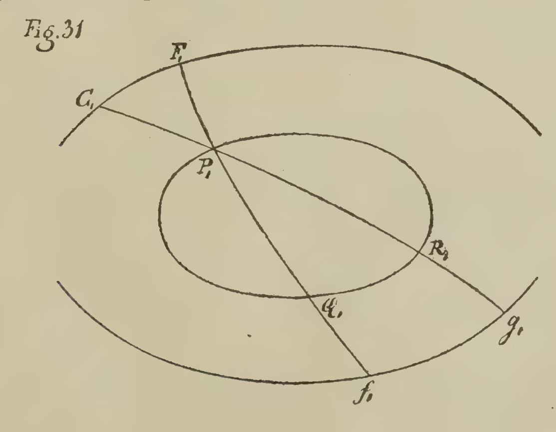
$$\angle QPR = \angle FCG \text{ und } \angle qpr = \angle fCg \ldots (b. 63)$$

Wenn man dann weiter die Geraden CQ und CR ungeändert lässt, CP jedoch den Teil der Seitenfläche des Kegels zwischen CQ und CR beschreiben lässt, so bleiben die Winkel QPR und qpr constant. Während CF, Cf, CG, Cg fortwährend sich ändern, müssen jedoch, den Gleichungen (b. 63) zufolge, die Winkel FCG und fCg, jeder für sich, constante Grösze behalten.

Diesen Satz und den durch die Gleichung (b. 62) ausgesprochenen wollen wir nun auf einen sphaerischen Kegelschnitt übertragen.

Ein **sphaerischer Kegelschnitt** ist der Durchschnitt eines schiefen kreisförmigen Kegels mit einer Kugel, deren Mittelpunkt in dem Scheitel des Kegels liegt.

Die Durchschnittsgeraden dieser Kugel mit den beiden cyclischen Ebenen des Kegels werden die **cyclischen Bogen** des Kegelschnittes genannt.



In der Figur 31 ist ein sphaerischer Kegelschnitt mit dessen beiden cyclischen Bogen gezeichnet. Es seien $P_1 Q_1 R_1$ die Punkte, wo der sphaerische Kegelschnitt von den Seitenlinien CP, CQ, CR bzhw. des Kegels, F_1, f_1, G_1, g_1 die Punkte, in denen die cyclischen Bogen von den Geraden CF, Cf, CG, Cg geschnitten werden.

Weil CP, CQ, CF, Cf und ebenfalls CP, CR, CG, Cg in einer Ebene enthalten sind, so müssen die Punkte P_1, Q_1, F_1, f_1 und ebenso P_1, R_1, G_1, g_1 in einem gröszten Kreise der Kugel um C liegen.

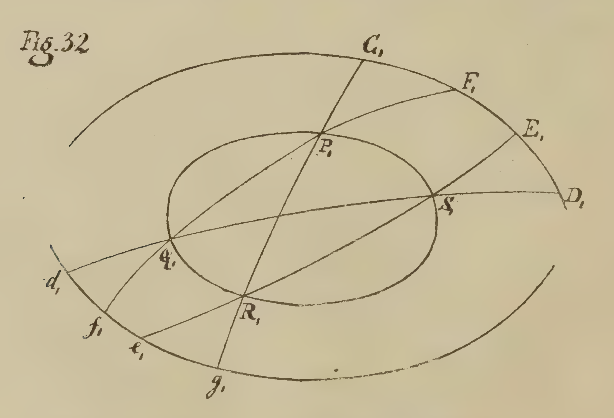
Die Gleichungen (b. 62) und (b. 62*) sagen nunmehr aus, dass

$$\widehat{Q_1 f_1} = \widehat{F_1 P_1} \quad \text{und} \quad \widehat{R_1 g_1} = \widehat{G_1 P_1}$$

und dasselbe gilt für die Abschnitte eines jeden durch P gehenden gröszten Kreises.

Nach der Gleichung (b. 63) und dem daraus Hervorgehenden muss weiter, wenn die Punkte $Q_1 R_1$ constant erhalten werden und P_1 den sphaerischen Kegelschnitt entlang sich bewegt, jeder der Abschnitte $f_1 g_1$ und $F_1 G_1$ der cyclischen Bogen constant bleiben.

50. Wir wollen diese Sätze dazu verwenden, die Gleichung (b. 60), welche das associative Princip für Versorenmultiplikation ausspricht, darzutun. Zu diesem Zwecke seien in der Figur 32 auf der Einheitskugel die gröszten Kreise $D_1 G_1$, $G_1 g_1$, $d_1 g_1$



gegeben, längs denen die gegebenen Versoren Uq'', Uq', Uq

wirken, sammt den Gröszen der Winkel dieser Versoren. Wir tragen nun ab

$$Uq'' = \widehat{F_1G_1}, \quad Uq' = \widehat{G_1P_1},$$

so ist

$$Uq'\,Uq'' = \widehat{F_1P_1}.$$

Verlängern wir nun den Kreis G_1P_1, bis derselbe den Kreis des Versors Uq in g_1 schneidet, und nehmen wir

$$\widehat{R_1g_1} = \widehat{G_1P_1} = Uq'$$

und

$$\widehat{g_1e_1} = Uq$$

so wird $\widehat{R_1e_1}$ den Versor $Uq\,Uq'$ darstellen.

Wir wählen weiter die Kreise F_1G_1 und g_1e_1 als cyclische Bogen eines durch P_1 gehenden sphaerischen Kegelschnitts. Es ist dieser letztere dadurch vollständig bestimmt; denn wenn man durch P_1 alle grösztcn Kreise zieht, wie z. B. G_1g_1, und jedesmal auf denselben einen Punkt R_1 so bestimmt, dass $\widehat{R_1g_1} = \widehat{G_1P_1}$, so wird der Punkt R_1 den fraglichen Kegelschnitt beschreiben.

Wenn wir nachher den Bogen F_1P_1 verlängern, bis derselbe in Q_1 den Kegelschnitt, in f_1 den cyclischen Bogen g_1e_1 schneidet, so hat man nach dem ersten Satze der sphaerischen Kegelschnitte

$$\widehat{Q_1f_1} = \widehat{F_1P_1} = Uq'\,Uq''.$$

Man kann sodann

$$\widehat{f_1d_1} = \widehat{g_1e_1} = Uq$$

abtragen, und erhält dadurch

$$\widehat{Q_1d_1} = Uq(Uq'\,Uq'').$$

Es lässt sich weiter sehr leicht zeigen, dass der Schnittpunkt S_1 der Kreise d_1Q_1, e_1R_1 ein Punkt des sphaerischen Kegelschnitts sein muss. Denn wäre dies nicht der Fall und schnitte d_1Q_1 den Kegelschnitt in S, so könnten wir SR_1 ziehen, welcher sodann nicht mit S_1R_1 zusammenfallen könnte. Es würde daher auch SR_1 den cyclischen Bogen nicht in e_1, sondern in einem andern Punkte e schneiden. Weil aber P_1 und S auf dem Kegelschnitt liegen, so wäre nach dem zweiten Satze

$$\widehat{g_1 f_1} = \widehat{e d_1} \quad \text{oder} \quad \widehat{g_1 e} = \widehat{f_1 d_1},$$

während $\widehat{f_1 d_1}$ gleich $\widehat{g_1 e_1}$ genommen ist. Es muss somit e mit e_1, d. h. auch S mit S_1 zusammenfallen.

Nach dem ersten Satze ist weiter, da wir nun wissen, dass S_1 auf dem Kegelschnitt liegt:

$$\widehat{D_1 S_1} = \widehat{Q_1 d_1} = Uq(Uq' Uq'') \text{ und } \widehat{E_1 S_1} = \widehat{R_1 e_1} = Uq Uq' \text{ . } (b. 64)$$

Und dem zweiten Satze zufolge ist, wenn P_1, S_1 als constant, Q_1, R_1 als variabel betrachtet werden.

$$\widehat{E_1 G_1} = \widehat{D_1 F_1}$$

und deshalb auch

$$\widehat{D_1 E_1} = \widehat{F_1 G_1} = Uq''.$$

Der Bogen $\widehat{D_1 S_1}$, aus $\widehat{D_1 E_1}$ und $\widehat{E_1 S_1}$ entstanden gedacht, stellt somit auch $(Uq Uq') Uq''$ vor, und durch die Verknüpfung dieses Resultats mit ($b.$ 64) wird erhalten:

$$Uq(Uq' Uq'') = (Uq Uq') Uq''$$

51. Nachdem hiermit die Frage nach der Gültigkeit des associativen Princips bei Produkten, welche drei Faktoren enthalten, bejahend entschieden ist, können wir dasselbe leicht auf Produkte, welche aus mehr als drei Faktoren bestehen, ausdehnen.

Es können nämlich in jedem Produkte zwei auf einander folgende Factoren durch einen einzigen Quaternion, das Produkt derselben, ersetzt werden. Nehmen wir z. B. den Satz

$$qq'q''q'''q^{IV} = q(q'q'')q'''q^{IV}$$

Weil $q'''q^{IV}$ als ein einziger Quaternion betrachtet werden kann, so ist nach dem vorigen Artikel

$$q'q''q'''q^{IV} = (q'q'')q'''q^{IV}$$

und nachher mit q an beide Seiten operirend, entsteht unser Satz.

Es können aber auch drei aufeinanderfolgende Factoren durch ihr Produkt ersetzt werden, z. B.

$$qq'q''q''' = (qq'q'')q'''.$$

Denn

$$qq'q''q''' = q(q'q'')q''' = \{q(q'q'')\}q''' = \{qq'q''\}q'''.$$

52. Wir sind jetzt zu dem Quotienten zweier Quater-

nionen q und q' angelangt. Wir stellen dafür die nachfolgende Definition auf:

Anstatt $q\frac{1}{q'}$ wollen wir schreiben $\frac{q}{q'}$ oder $q:q'$; in Zeichen

$$\frac{q}{q'} = q\frac{1}{q'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,65)$$

und wir sagen der Quaternion q werde durch q' dividirt, wobei q der Zähler, q' der Nenner, $\frac{q}{q'}$ der Quotient heiszt.

Weil q und $\frac{1}{q'}$ Quaternionen sind, so muss nach Art. 39 $\frac{q}{q'}$ oder der Quotient zweier Quaternionen auch ein Quaternion sein.

Man kann zuerst den nachstehenden Satz beweisen:

Der Quotient $\frac{q}{q'}$ zweier Quaternionen ist ein Quaternion, der *durch* q' multiplicirt, q als Produkt ergibt.

Es sei nämlich $q = \frac{\beta}{\alpha}$, $q' = \frac{\gamma}{\alpha}$, sodass vorausgesetzt wird, dass q und q' auf denselben Nenner reducirt sind, wie nach Art. 35 stets möglich ist. Dadurch wird $\frac{1}{q'} = \frac{\alpha}{\gamma}$ und

$$\frac{q}{q'} = q\frac{1}{q'} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \text{ nach } (b.\,45).$$

Es ist jedoch weiter

$$\frac{q}{q'}\,q' = \frac{\beta}{\gamma}\,\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ nach } (b.\,45) = q. \quad \ldots\ldots \quad (b.\,66)$$

und hiermit ist unser Satz bewiesen.

Aus der Definition erhellt auch sogleich:

$$\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \text{ nach } (b.\,45). \quad \ldots\ldots \quad (b.\,67)$$

Oder in Worten: der Quotient zweier Quaternionen mit gleichem Divisor ist dem Quotienten der Zähler gleich.

Wenn man $\frac{q}{q'}$ *mit* q' multiplicirt, so ist im allgemeinen das Produkt *nicht* q. Denn es ist bei den obigen Voraussetzungen

$$q = \beta : \alpha, \quad q' = \gamma : \alpha.$$

$$q' \frac{q}{q'} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\beta}{\gamma}$$

und dieser Ausdruck ist nicht derselbe wie $\frac{\beta}{\alpha}$.

In derselben Weise schlieszt man, dass, weil nach der Definition $\frac{q}{q'} = q\frac{1}{q'}$, die Ungleichheit bestehen muss

$$\frac{q}{q'} \gtrless \frac{1}{q'} q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 68)$$

Einige wenigen Formeln mögen noch hinzugefügt werden:

$$T\frac{q}{q'} = T\left(q\frac{1}{q'}\right) = Tq\,T\frac{1}{q'} \text{ nach } (b.\ 47) =$$

$$= Tq\frac{1}{Tq'} \text{ nach } (b.\ 8) = \frac{Tq}{Tq'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 69)$$

$$U\frac{q}{q'} = U\left(q\frac{1}{q'}\right) = Uq\,U\frac{1}{q'} \text{ nach } (b.\ 47) =$$

$$= Uq\frac{1}{Uq'} \text{ nach } (b.\ 8) = \frac{Uq}{Uq'} \text{ nach } (b.\ 59). \quad (b.\ 70)$$

$$K\frac{q}{q'} = K\left(q\frac{1}{q'}\right) = K\left(\frac{1}{q'}\right)Kq \text{ nach } (b.\ 54) =$$

$$= \frac{1}{Kq'}Kq \text{ nach } (b.\ 14) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 71)$$

Nehmen wir wieder die Bezeichnung auf

$$q = \beta : \alpha, \quad q' = \gamma : \alpha$$

so ist

$$\frac{1}{\frac{q}{q'}} = \frac{1}{\frac{\beta}{\gamma}} \text{ (siehe oben)} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} \text{ nach } (b.\ 67) = \frac{q'}{q} \quad \ldots \quad (b.\ 72)$$

Noch wollen wir den besonderen Fall $q' = Kq$ erwähnen. Es wird

$$\frac{q}{Kq} = q\frac{1}{Kq} = Tq\,Uq\,\frac{1}{\frac{Tq}{Uq}} \text{ nach } (b.\ 24) =$$

$$= Tq\,Uq\frac{Uq}{Tq} \text{ nach } (b.\ 72) = (Uq)^2. \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 73)$$

und für den letzteren Ausdruck kann noch Uq^2 oder $U.q^2$ gesetzt werden nach ($b.$ 49).

Ein letzter Satz ist der nachstehende: Ein Quotient zweier Quaternionen bleibt ungeändert, wenn Dividendus und Divisor *durch* denselben Quaternion multiplicirt werden, oder in Zeichen

$$\frac{q'}{q} = \frac{q'q''}{qq''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,73^*)$$

Denn es ist

$$\frac{q'q''}{qq''} = q'q''\frac{1}{qq''} \text{ nach der Definition} = q'q''\frac{1}{q''}\frac{1}{q} \text{ nach } (b.\,53)$$

$$= q'\left(q''\frac{1}{q''}\right)\frac{1}{q} \text{ nach Art. 49} = q'\frac{1}{q} = \frac{q'}{q}.$$

Ein besonderer Fall der Gleichung ($b.$ 73*) ist

$$\frac{x}{q} = \frac{xq''}{qq''}.$$

Man ersieht leicht, dass der Satz nicht gültig bleibt, wenn Zähler und Nenner *mit* demselben Quaternion multiplicirt werden.

Auch ist

$$\frac{q'}{q} = \frac{\dfrac{q'}{q''}}{\dfrac{q}{q''}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,73^{**})$$

weil nach ($b.$ 73*)

$$\frac{q'}{q} = \frac{q'\dfrac{1}{q''}}{q\dfrac{1}{q''}} = \frac{\dfrac{q'}{q''}}{\dfrac{q}{q''}}.$$

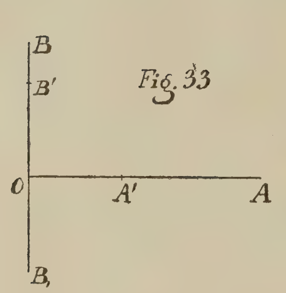
53. Rechte Quaternionen. Eine besonders wichtige Art der Quaternionen ist diejenige, bei welcher $\angle q = \frac{\pi}{2}$. Ein solcher Quaternion, dessen Winkel recht ist, soll ebenfalls recht genannt werden; mehrere rechten Quaternionen werden im Folgenden mit r, r', r'' .... bezeichnet.

Wenn ausserdem der Tensor des Quaternions der Einheit gleich ist, so haben wir es mit einem rechten Radial zu tun.

Mit geringer Mühe wird man ersehen, dass der Reciproke und der Conjugirte eines rechten Quaternions ebenfalls recht sind, und dass auch das nämliche für einen Ausdruck der Form xr (x Skalar) gilt.

Wir wollen nun zuerst zeigen

$$U\frac{1}{r} = -Ur \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b. 74^*)$$



In der Figur 33 sei

$$r = \mathrm{OB} : \mathrm{OA},$$

und

$$T.\mathrm{OA}' = T.\mathrm{OB}' = 1;$$

wenn wir BO verlängern, und

$$T.\mathrm{OB}_1 = 1$$

nehmen, so ist

$$U\frac{1}{r} = \frac{\mathrm{OA}'}{\mathrm{OB}'} = \frac{\mathrm{OB}_1}{\mathrm{OA}'} = -\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}'} = -Ur.$$

Ist r ein rechter Radial, so kann man einfach schreiben

$$\frac{1}{r} = -r.$$

Wie unmittelbar aus den Definitionen erfolgt, gilt die Formel

$$Kr = -r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b. 74)$$

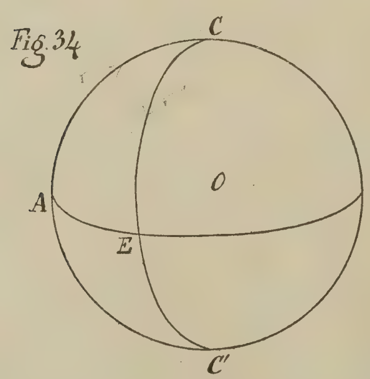
und die allgemeine Formel $K.q'q = KqKq'$ ($b.$ 54) geht demnach über in

$$K.r'r = rr' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b. 75)$$

Denn es wird nach ($b.$ 74)

$$K.r'r = KrKr' = -r.-r' = (-1)(-1)rr' \text{ nach } (b.\ 52) = rr'.$$

Wir wollen die Formel ($b.$ 75) auch noch durch eine Figur veranschaulichen.



Es seien (Fig. 34)

$$\widehat{\mathrm{AC}} = Ur, \; \widehat{\mathrm{CE}} = Ur',$$

so dass

$$\widehat{\mathrm{AC}} = \widehat{\mathrm{CE}} = \frac{\pi}{2}.$$

Man erhält dadurch nach Art. 45

$$\widehat{\mathrm{AE}} = Ur.Ur'$$

Es ist aber $\widehat{\mathrm{AE}}$ der reciproke oder auch der conjugirte Versor von EA und dieser Bogen kann als das Produkt der Versoren $\widehat{\mathrm{EC}'}$, $\widehat{\mathrm{C'A}}$ betrachtet werden, während

$$\widehat{\mathrm{EC'}} = \widehat{\mathrm{CE}} = Ur', \quad \widehat{\mathrm{C'A}} = \widehat{\mathrm{AC}} = Ur.$$

Es wird deshalb

$$\frac{1}{Ur'\,Ur} = K.(Ur'.Ur) = Ur.Ur'.$$

Und hieraus erhält man weiter:

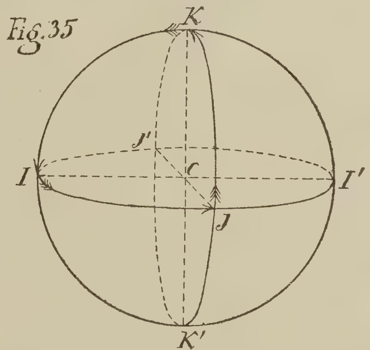
$$K.r'r = K(Tr'\,Tr\,Ur'\,Ur) = Tr'\,TrK.Ur'\,Ur \text{ nach } (b.\ 22)$$
$$= Tr'\,Tr\,Ur\,Ur' \text{ nach der zuletzt bewiesenen Gleichung}$$
$$= rr'.$$

Man ersieht hieraus zugleich, dass wenn der Winkel zwischen den Ebenen der Quaternionen r und r' ein rechter ist, der Versor $\widehat{\mathrm{AE}}$ von rr' und deshalb auch der Quaternion rr' selbst recht wird.

54. Wir werden später häufig einem System dreier rechten Radiale, so construirt, dass die Ebenen von je zwei dieser Radiale unter sich rechtwinklig sind, begegnen, das wir deshalb hier einigen einfachen Betrachtungen unterwerfen.

Hamilton bezeichnet die drei rechten Radiale mit den Symbolen i, j, k.

Dieselben mögen durch die drei Versorbogen $\widehat{\mathrm{JK}}$, $\widehat{\mathrm{KI}}$, $\widehat{\mathrm{IJ}}$ (Fig. 35) veranschaulicht werden und dazu möge man annehmen, OI sei die Achse des Versors $\widehat{\mathrm{JK}}$, OJ diejenige des Versors $\widehat{\mathrm{KI}}$, endlich OK die Achse des Versors $\widehat{\mathrm{IJ}}$.



Durch diese Annahmen ist das System der rechten Radiale vollständig bestimmt. Wir führen noch die Gegenpunkte I′, J′, K′ der Punkte I, J, K auf der Einheitskugel ein. Man erhält sodann die nachstehenden einfachen Formeln

$$i = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OJ}} = \frac{\mathrm{OJ'}}{\mathrm{OK}} = \frac{\mathrm{OK'}}{\mathrm{OJ'}} = \frac{\mathrm{OJ}}{\mathrm{OK'}},$$

$$j = \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OK}} = \frac{\mathrm{OK'}}{\mathrm{OI}} = \frac{\mathrm{OI'}}{\mathrm{OK'}} = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OI'}},$$

$$k = \frac{OJ}{OI} = \frac{OI'}{OJ} = \frac{OJ'}{OI'} = \frac{OI}{OJ'}.$$

Dadurch erhält man weiter:

$$\frac{1}{i} = \frac{OJ}{OK} = -\frac{OJ'}{OK} = -i, \quad \frac{1}{j} = \frac{OK}{OI} = -\frac{OK'}{OI} = -j,$$

$$\frac{1}{k} = \frac{OI}{OJ} = -\frac{OI'}{OJ} = -k$$

oder kurz

$$\frac{1}{i} = -i, \; \frac{1}{j} = -j, \; \frac{1}{k} = -k. \; \ldots\ldots \; (b. 76)$$

$$i^2 = ii = \frac{OJ'}{OK}\frac{OK}{OJ} = \frac{OJ'}{OJ} \text{ nach } (b. 45) = -1,$$

$$j^2 = jj = \frac{OK'}{OI}\frac{OI}{OK} = \frac{OK'}{OK} \text{ nach } (b. 45) = -1,$$

$$k^2 = kk = \frac{OI'}{OJ}\frac{OJ}{OI} = \frac{OI'}{OI} \text{ nach } (b. 45) = -1,$$

oder kurz

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \; \ldots\ldots \; (b. 77)$$

$$jk = \frac{OK'}{OI}\frac{OI}{OJ'} = \frac{OK'}{OJ'} \text{ nach } (b. 45) = i,$$

$$ki = \frac{OI'}{OJ}\frac{OJ}{OK'} = \frac{OI'}{OK'} \text{ nach } (b. 45) = j,$$

$$ij = \frac{OJ'}{OK}\frac{OK}{OI'} = \frac{OJ'}{OI'} \text{ nach } (b. 45) = k,$$

oder kurz

$$jk = i, \quad ki = j, \quad ij = k \; \ldots\ldots \; (b. 78)$$

$kj = K.jk$, nach (b. 75) $= Ki$, nach (b. 78) $= -i$, nach (b. 74);
$ik = K.ki$, nach (b. 75) $= Kj$, nach (b. 78) $= -j$, nach (b. 74),
$ji = K.ij$, nach (b. 75) $= Kk$, nach (b. 78) $= -k$, nach (b. 74),
oder kurz

$$kj = -i, \; ik = -j, \; ji = -k. \; \ldots\ldots \; (b. 79)$$

$$ijk = i(jk) = ii \text{ nach } (b. 78) = -1 \text{ nach } (b. 77),$$

$$jki = j(ki) = jj \text{ nach } (b. 78) = -1 \text{ nach } (b. 77),$$

$$kij = k(ij) = kk \text{ nach } (b. 78) = -1 \text{ nach } (b. 77),$$

oder kurz

$$ijk = jki = kij = -1 \; \ldots\ldots \; (b. 80)$$

Cyclische Umtauschung der Faktoren ändert demnach das Symbol ijk nicht.

$jik = j(ik) = j(-j)$ nach (b. 79) $= -j^2 = 1$ nach (b. 76),
$ikj = i(kj) = i(-j)$ nach (b. 79) $= -i^2 = 1$ nach (b. 76) u.s.w.

Acyclische Umtauschung der Faktoren des Symbols ijk ändert das Zeichen.

Noch wird weiter

$$iij = (ii)j = -j,$$
$$iji = i(ji) = i(-k) = -ik = j,$$
$$jii = ji^2 = -j;$$
$$i^2j^2k^2 = iijjkk = -iijj = +ii = -1,$$
$$(ijk)^2 = (ijk)(ijk) = (-1)(-1) = +1.$$

Somit ist

$$(ijk)^2 \gtrless i^2j^2k^2.$$

Diese Resultate zu benutzen werden wir später mehrmals Gelegenheit haben.

55. Wir kommen nunmehr zur Einführung einer Grösze, die von Hamilton als eine der wichtigsten des Quaternionen-calcüls erkannt worden ist und welche später bei unsren Rechnungen eine wichtige Rolle spielen wird.

Im Art. 28 sahen wir, dass die Achse eines Quaternions als ein Vektor unbestimmter Länge zu betrachten sei.

Bei einem rechten Quotienten r nimmt Hamilton einen Vektor in der Richtung $Ax.r$, dessen Tensor gleich Tr ist. Der so bestimmte Vektor ist der I n d e x des rechten Quaternions genannt und mit Ir bezeichnet.

Wir erhalten sodann den wichtigen Satz:

Ein rechter Quaternion ist durch seinen Index ganz bestimmt.

Denn es ist durch die Richtung des Index $Ax.r$, durch den Tensor des Index Tr bestimmt, während $\angle r = \frac{\pi}{2}$, und diese Gröszen bestimmen nach Art. 28 den Quaternion vollständig.

Es folgt hieraus, dass zwei rechte Quaternionen mit gleichen Indices einander gleich sein müssen, oder

Wenn $Ir = Ir'$, so ist auch $r = r'$, und umgekehrt . (b. 81)

Man wird auch leicht die Richtigkeit der nachstehenden Formel ersehen

$$I.xr = xIr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b.\ 62)$$

wenn x ein positiver oder negativer Skalar ist. Denn weil für

positives x die in xr enthaltene Drehung mit der in r vorhandenen übereinstimmt, muss nur der Tensor des Index geändert werden, und das Resultat dieser Operation wird durch xIr ausgedrückt. Bei negativem x ist die in xr enthaltene Drehung der in r enthaltenen entgegengesetzt; es ist jedoch in diesem Falle auch xIr entgegengesetzt zu Ir.

Ein besonderer Fall der Formel (b. 82) ist

$$I(-r) = -Ir,$$

und nach (b. 74) kann man die hierin vorkommenden Gröszen zusammenstellen mit $I(Kr)$, wie nachstehend

$$IKr = I(-r) = -Ir \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 83)$$

Weil

$U\frac{1}{r} = -Ur$ (nach den Formeln (b. 8) und (b. 74)) so ist

$I\frac{1}{r}$ ein Vektor, dessen Richtung derjenigen des Vektors Ir entgegengesetzt ist; weiter ist

$$TI\frac{1}{r} = T\frac{1}{r} = \frac{1}{Tr} = \frac{Tr}{Nr} = \frac{TIr}{Nr}.$$

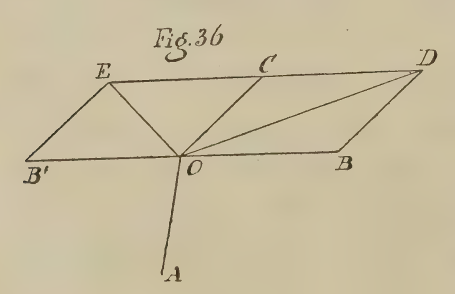
Man erhält demnach die Formel

$$I\frac{1}{r} = -\frac{Ir}{Nr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 84)$$

Noch wird

$$IUr = UIr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 85)$$

Denn IUr ist ein Vektor, senkrecht zur Ebene des Quaternions r, dessen Tensor 1 ist, und dasselbe gilt von UIr.



56. Wir fassen weiter die Summe zweier rechten Quaternionen näher ins Auge.

In der Figur 34 sei OA ⊥ OB und OA ⊥ OC. Wir setzen voraus, die zwei rechten Quaternionen seien auf denselben Nenner OA reducirt, und man habe dadurch erhalten

$$r = OB : OA, \quad r' = OC : OA.$$

Es ist sodann

$$r + r' = (OB + OC) : OA = OD : OA.$$

Weil aber $OA \perp OB$ und $OA \perp OC$, so ist auch $OA \perp OD$.

Es folgt hieraus der Satz:

Die Summe zweier rechten Quaternionen ist ein rechter Quaternion.

Weil

$$r' - r = r' + (-r)$$

und $-r$ ein rechter Quotient ist, so wird auch $r' - r$, d. h. die Differenz zweier rechten Quaternionen, ein rechter Quaternion sein. Ist in der Figur 36

$$OB' = - OB,$$

so ist nach (*b.* 32)

$$r' - r = (OC - OB) : OA = \{OC + (- OB)\} : OA =$$
$$= (OC + OB') : OA = OE : OA,$$

wie man leicht nachweist.

Es kann dieser Satz unschwer verallgemeinert werden zum nachfolgenden:

Wenn x, x', x''... positive oder negative Skalare, r, r' r''... rechte Quaternionen sind, so wird

$$xr + x'r' + x''r'' + \ldots$$

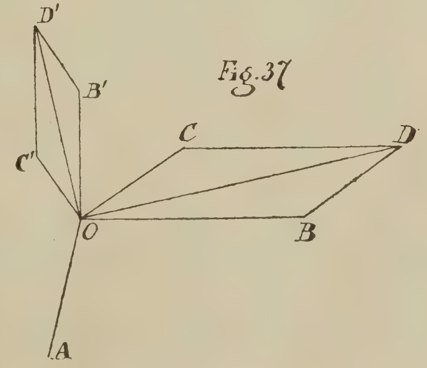
ein rechter Quotient sein.

Es sind nämlich, wie in Art. 53 schon erwähnt ist, xr, $x'r'$, $x''r''$... rechte Quaternionen. Nach dem ersten und dem zweiten Satze dieses Artikels ist sodann auch $xr + x'r'$ ein rechter Quotient; nach denselben Sätzen wird deshalb auch $xr + x'r' + x''r''$ ein rechter Quaternion sein, u. s. w.

57. In der Figur 37 sei $OB : OA = r$, $OC : OA = r'$, $OB' = Ir$, $OC' = Ir'$, d. h. $T.OB' = Tr$, $T.OC' = Tr'$ und

$OB' \perp$ zur Ebene AOB,
$OC' \perp$ zur Ebene AOC.

Es mögen weiter die Parallelogramme OBDC, OB'D'C' construirt werden.



Die Geraden OC′, OD′, OB′, OC, OD, OB sind sämtlich senkrecht zu OA und liegen deshalb in einer Ebene.

Die Dreiecke D′B′O und DBO sind ähnlich; denn es ist

$$T.\mathrm{OB}' : T.\mathrm{B'D'} = T.\mathrm{OB}' : T.\mathrm{OC}' = Tr : Tr' = \frac{T.\mathrm{OB}}{T.\mathrm{OA}} : \frac{T.\mathrm{OC}}{T.\mathrm{OA}},$$

oder

$$T.\mathrm{OB}' : T.\mathrm{B'D'} = T.\mathrm{OB} : T.\mathrm{OC} = T.\mathrm{OB} : T.\mathrm{BD}$$

und

$$\angle \mathrm{D'B'O} = \angle \mathrm{DBO}.$$

Es folgt hieraus erstens, dass die Winkel D′OB′ und DOB einander gleich sein müssen, und weil OB′ | OB, muss sodann auch OD $\perp$ OD′ oder OD′ $\perp$ zur Ebene DOA sein. Es folgt aber weiter aus der Ähnlichkeit der Dreiecke D′B′O, DBO

$$T.\mathrm{OD}' : T.\mathrm{OD} = T.\mathrm{OB}' : T.\mathrm{OB} = T\,\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} : T.\mathrm{OB} = 1 : T.\mathrm{OA},$$

oder

$$T.\mathrm{OD}' = T.\,\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}}.$$

Der Vektor OD′ ist nach diesen beiden Ergebnissen der Index des rechten Quotienten OD : OA, oder in Zeichen

$$\mathrm{OD}' = I\,\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}}$$

$$\mathrm{OB}' + \mathrm{OC}' = I.\left(\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}\right)$$

$$Ir + Ir' = I(r + r'). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b.\,86)$$

Es ist dies eine ungemein wichtige Formel; dieselbe drückt aus, dass bei der Addition von rechten Quotienten die Summe der Indices der beiden Quotienten dem Index der Summe gleich ist. Weil aber aus dem Index der Summe diese Summe selbst unmittelbar bekannt ist, so pflegt man zu sagen:

Um rechte Quotienten zu addiren, braucht man nur die Indices derselben zu addiren.

Es ist nunmehr leicht hieraus herzuleiten, dass derselbe Satz auch bei der Subtraction rechter Quotienten gültig bleibt, denn man erhält

$$I(r - r') = I[r + (-r')] \text{ nach } (b.\,31) = Ir + I(-r') \text{ nach } (b.\,86),$$
$$= Ir + (-Ir') \text{ nach } (b.\,83) = Ir - Ir' \text{ nach } (b.\,31),$$

oder kurz

$$I(r - r') = Ir - Ir' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 87)$$

Von nicht wenigerer Wichtigkeit ist der nachfolgende Satz: Der Quotient zweier rechten Quaternionen ist dem Quotienten ihrer Indices gleich, oder in Zeichen

$$\frac{r}{r'} = \frac{Ir}{Ir'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 88)$$

Wir werden diesen Satz leicht mit Hülfe der Figur 38 beweisen können, in der

$$r = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}, \quad r' = \mathrm{OC} : \mathrm{OA}, \quad Ir = \mathrm{OB}', \quad Ir' = \mathrm{OC}'.$$

r und r' sind somit auf gleichen Nenner reducirt worden. Es ist nämlich

$$\frac{r}{r'} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} : \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}} \text{ nach } (b.\ 67).$$

Fig. 38

Die Geraden OB, OC, OB′, OC′, sind sämtlich in einer Ebene senkrecht zu OA enthalten; und weil noch

$$\mathrm{OB}' \perp \mathrm{OB}, \quad \mathrm{OC}' \perp \mathrm{OC},$$

so ist

$$\angle \mathrm{B'OC'} = \angle \mathrm{BOC}.$$

Weiter erfolgt wie bei der Figur 35

$$T.\mathrm{OB}' : T.\mathrm{OC}' = T.\mathrm{OB} : T.\mathrm{OC}.$$

Die Dreiecke B′OC′, BOC sind somit ähnlich und liegen in derselben Ebene. Nach Art. 29 erhält man dadurch

$$\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OC}'} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}}$$

oder

$$\frac{Ir}{Ir'} = \frac{r}{r'}.$$

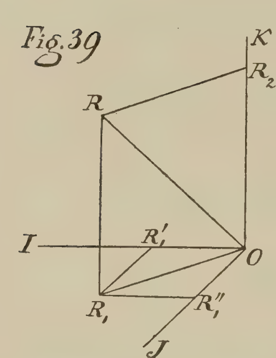
Weil das Produkt zweier Indices für uns noch keinen Sinn hat, so können wir die Gültigkeit desselben Satzes bei der Multiplication nicht einer Untersuchung unterwerfen.

58. Eine sehr wichtige Folge des durch die Gleichung ($b.$ 86) ausgesprochenen Princips ist die nachstehende:

Jeder rechte Quaternion kann als Summe dreier unter sich rechtwinkligen rechten Quotienten dargestellt werden.

Wir fassen zu diesem Zwecke wieder die Bezeichnungen des Artikels 54 auf, wo wir die drei rechten Radiale i, j, k einführten. Wie wir schon in jenem Artikel erörterten, sind dieselben so gewählt, dass wenn

$$i = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OJ}},\ j = \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OK}},\ k = \frac{\mathrm{OJ}}{\mathrm{OI}}$$



zugleich OI die Achse von i, OJ von j, OK von k ist.

Nehmen wir auszerdem an

$$T.\mathrm{OI} = T.\mathrm{OJ} = T.\mathrm{OK} = 1,$$

so stellen OI, OJ, OK bzhw. die Indices der rechten Quotienten i, j, k dar, oder

$$\mathrm{OI} = \mathrm{I}i,\ \mathrm{OJ} = \mathrm{I}j,\ \mathrm{OK} = \mathrm{I}k \quad . \ . \ (b.\ 89)$$

Es sei nunmehr ein willkürlicher rechter Quaternion r gegeben. Wir construiren Ir und wählen dazu O als Anfangspunkt, sodass wir erhalten:

$$\mathrm{OR} = Ir.$$

Zieht man $\mathrm{RR_1} // \mathrm{KO}$, und in der Ebene ROK noch $\mathrm{RR_2} // \mathrm{R_1O}$, so ist

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OR_1} + \mathrm{OR_2}.$$

Indem man weiter $\mathrm{R_1R_1''} // \mathrm{IO}$ und $\mathrm{R_1R_1'} // \mathrm{JO}$ zieht, erhält man

$$\mathrm{OR_1} = \mathrm{OR_1'} + \mathrm{OR_1''}$$

und durch die Verbindung mit der vorigen Gleichung

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OR_1'} + \mathrm{OR_1''} + \mathrm{OR_2}.$$

Es kann aber gesetzt werden:

$$\mathrm{OR_1'} = x.\mathrm{OI},\ \mathrm{OR_1''} = y.\mathrm{OJ},\ \mathrm{OR_2} = z.\mathrm{OK},$$

wenn x, y, z drei positive oder negative Skalare bedeuten, und somit wird

$$\mathrm{OR} = x.\mathrm{OI} + y.\mathrm{OJ} + z.\mathrm{OK}$$

oder

$$\begin{aligned} Ir &= xIi + yIj + zIk \text{ nach } (b.\ 89) \\ &= Ixi + Iyj + Izk \text{ nach } (b.\ 82) \\ &= I(xi + yj + zk) \text{ nach } (b.\ 86) \end{aligned}$$

und schlieszlich nach ($b.$ 81)

$$r = xi + yj + zk \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 90)$$

Wenn man in diesem Ausdrucke die Skalare x, y, z sich ändern lässt, so kann man dadurch alle möglichen rechten Quotienten erhalten.

Es ist weiter leicht ersichtlich, dass durch die Verlängerung der Geraden IO, JO, KO der ganze Raum in acht Teile geteilt wird und dass die Zeichen der Gröszen x, y, z bestimmen, in welchem dieser acht Teile Ir liegt.

59. Die in den Artikeln 53—55 gefundenen Sätze setzen uns in den Stand ein neues sehr wichtiges Theorem der Multiplikation rechter Quaternionen darzutun. Es wird dasselbe durch die Gleichungen ($b.$ 91) ($b.$ 92) ($b.$ 93) ausgesprochen:

$$(r' + r'')r = r'r + r''r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 91)$$

$$r(r' + r'') = rr' + rr'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 92)$$

B e w e i s d e r R e l a t i o n ($b.$ 91): Wenn wir mit r_1 den Reciproken des rechten Quotienten r bezeichnen, d. h. $r = \frac{1}{r_1}$ setzen, so ist

$$(r' + r'')r = (r' + r'')\frac{1}{r_1} = \frac{r' + r''}{r_1} \text{ nach } (b.\ 65) =$$

$$= \frac{I(r' + r'')}{Ir_1} \text{ nach } (b.\ 88) = \frac{Ir' + Ir''}{Ir_1} \text{ nach } (b.\ 86) =$$

$$= \frac{Ir'}{Ir_1} + \frac{Ir''}{Ir_1} \text{ nach } (b.\ 25) = \frac{r'}{r_1} + \frac{r''}{r_1} \text{ nach } (b.\ 88) =$$

$$= r'\frac{1}{r_1} + r''\frac{1}{r_1} \text{ nach } (b.\ 65) = r'r + r''r.$$

B e w e i s d e r R e l a t i o n ($b.$ 92): Weil $r' + r''$ ein rechter Quaternion ist, so hat man die Relationen

$$r(r' + r'') = K.(r' + r'')r \text{ nach } (b.\ 75) = K(r'r + r''r) \text{ nach } (b.\ 91)$$

$$= K.r'r + K.r''r \text{ nach } (b.\ 42) = rr' + rr'' \text{ nach } (b.\ 75).$$

Allgemein wird man durch Verknüpfung der Gleichungen ($b.$ 91) ($b.$ 92) finden, wenn r', r'', ..., r_1, r_2 .... rechte Quotienten sind

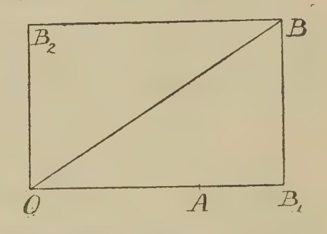
$$(r' + r'' + \ldots)(r_1 + r_2 + \ldots) = \Sigma\, r'r_1 \ldots \quad (b.\ 93)$$

wo das Zeichen Σ bedeutet, dass jede der Gröszen r', r''.... durch jede der Gröszen r_1, r_2 .... multiplicirt werden soll.

60. Im Anfange dieses Abschnittes ergab sich die Darstellung eines Quaternions als Produkt der Operationen T und U.

Man kann jedoch auch weiter jeden Quaternion als Summe zweier bestimmten Operationen darstellen, welche durch die Zeichen S und V vertreten werden. Von dieser Darstellung wollen wir in den nächsten Artikeln handeln, und es wird sich daraus eine Menge sehr nützlicher und deshalb wichtiger Beziehungen und Sätze ergeben.

Betrachten wir den willkürlichen Quaternion $q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$ (Figur 40).



Projicirt man OB auf OA mittelst BB_1 und zieht $\mathrm{OB}_2 \mathrel{/\!/\!=} \mathrm{B}_1\mathrm{B}$ so erhält man

$$q = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}_1 + \mathrm{B}_1\mathrm{B}}{\mathrm{OA}} =$$

$$= \frac{\mathrm{O}_1\mathrm{B} + \mathrm{OB}_2}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}_1}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{OB}_2}{\mathrm{OA}}.$$

Hierdurch ist der Quaternion q dargestellt als die Summe der zwei Quotienten $\mathrm{OB}_1 : \mathrm{OA}$ und $\mathrm{OB}_2 : \mathrm{OA}$.

Der erste is eine positive oder negative Skalargrösze, weil die Richtungen OB_1 und OA entweder zusammenfallen oder einander entgegengesetzt sind. Es wird deshalb dieser Quotient der Skalarteil des Quaternions q genannt und mit Sq bezeichnet.

Der andere Teil ist ein rechter Quotient, wird der Vektorteil des Quaternions q genannt und mit Vq bezeichnet. Es gilt demnach allgemein die Formel

$$q = Sq + Vq \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b.\ 94)$$

Es ist weiter einleuchtend, dass

$$\text{wenn } q = q',\ Sq = Sq' \text{ und } Vq = Vq' \quad \ldots \ldots \quad (b.\ 95)$$

und das Umgekehrte dieses Satzes ist ebenfalls gültig. (Man sehe auch Art. 67).

Aus den Definitionen ist unmittelbar ersichtlich, dass die zwei nachstehenden Formeln bestehen

$$SVq = 0 \text{ und } VSq = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b.\ 96)$$

61. Wir wenden jetzt unsre Aufmerksamkeit speciell dem Skalarteil zu, und werden dann leicht ersehen, dass

$$\left.\begin{aligned} Sq > 0, &\text{ wenn } \angle q < \frac{\pi}{2} \\ Sq = 0, &\text{ wenn } \angle q = \frac{\pi}{2} \\ Sq < 0, &\text{ wenn } \angle q > \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,97)$$

und auch die Umgekehrten dieser Sätze kommen zur Geltung.

Weiter findet man die nachstehenden Beziehungen

1°. $S(Sq)$ oder $S^2q = Sq$ und allgemein $S^nq = Sq$ . . (b. 98)

2°. $TSq = \pm Sq$, je nachdem $\angle q < \frac{\pi}{2}$ oder $\angle q > \frac{\pi}{2}$.

Es folgt dies daraus, dass der Tensor stets positiv sein muss nach Art. 28.

3°. $$Sq = Tq \cos \angle q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,99)$$

Denn mit Hülfe der Figur 40 wird gefunden

$$Sq = \frac{\mathrm{OB}_1}{\mathrm{OA}} = \frac{T.\mathrm{OB}_1}{T.\mathrm{OA}} = \frac{T.\mathrm{OB}}{T.\mathrm{OA}}\,\frac{T.\mathrm{OB}_1}{T.\mathrm{OB}} = Tq \cos \angle q.$$

4°. $$S\frac{1}{q} = \frac{Sq}{Nq} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,100)$$

Denn es ist in der Figur 41, wo $\mathrm{AA}' \perp \mathrm{OB}$, $\mathrm{BB}' \perp \mathrm{OA}$,

$$S\frac{1}{q} = S\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OA}'}{\mathrm{OB}} = \frac{T.\mathrm{OA}'}{T.\mathrm{OB}} =$$

$$= \frac{T.\mathrm{OA}.T.\mathrm{OB}'}{(T.\mathrm{OB})^2} \text{ weil } \triangle \mathrm{OAA}' \backsim \mathrm{OBB}'$$

$$= \frac{T.\mathrm{OB}'}{T.\mathrm{OA}}\left(\frac{T.\mathrm{OA}}{T.\mathrm{OB}}\right)^2 = \frac{Sq}{Tq^2} = \frac{Sq}{Nq}.$$

5°. $$SKq = Sq \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,101)$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition von Kq.

6°. $$Sxq = xSq \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,102)$$

Es wird nämlich, wenn der Vektor OB geändert wird, die Projection OB′ in demselben Verhältnisse geändert, und deshalb ist:

$$Sxq = S\frac{x.\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{x.\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}} = x\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}} = xSq.$$

Als besondere Fälle ergeben sich noch die Formeln

$$S(-q) = -Sq \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,102^*)$$

$$Sx = x$$

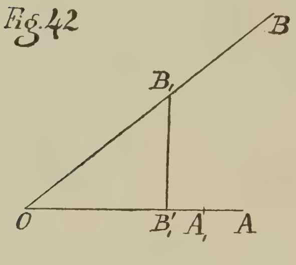
7°. $SUq = \cos \angle q$ . . . . (b. 103)

Aus $Sq = Tq \cos \angle q$ (b. 99) lässt sich schlieszen:

$$SUq = TUq \cos \angle Uq.$$

Weil aber $TUq = 1$ und $\angle Uq = \angle q$, so vereinfacht diese Formel sich zu (b. 103).

Dieselbe Formel ist aber auch leicht mit Hülfe der Figur 42 zu ersehen.



Es sei $OA_1 = U.OA$, $OB_1 = U.OB$ und $B_1B_1' \perp OA$, so wird

$$SUq = \frac{OB_1'}{OA_1} = \frac{T.OB_1'}{T.OB_1} = \cos \angle q.$$

8°. $SU\frac{1}{q} = SUq$ . . . . (b. 104)

Nach (b. 103) wird zunächst

$$SU\frac{1}{q} = \cos \angle \frac{1}{q},$$

und die zweite Seite ist nach (b. 8) $= \cos \angle q = SUq$.

9°. Wenn ein Vektor β auf einen anderen projicirt wird, so ist die Projection $= \left(S\frac{\beta}{\alpha}\right)\alpha$ . . . . (b. 105)

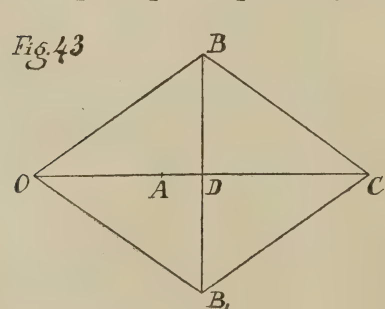
In der Figur 40 z. B. wird die Projection

$$OB_1 = \frac{OB_1}{OA}\, OA = (Sq)\,\alpha, \text{ wo } q = \frac{\beta}{\alpha}.$$

10°. $KSq = Sq$ . . . . (b. 136)

Diese Formel ist unmittelbar der Construction des conjugirten Quaternions (Art. 35) zu entnehmen.

11°. $q + Kq = 2\,Sq$ oder symbolisch $1 + K = 2\,S$ oder $S = \frac{1}{2}(1 + K)$ . . . (b. 107)



In der Figur 43 wird

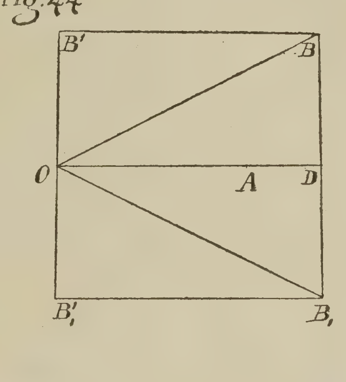
$$q + Kq = \frac{OB}{OA} + \frac{OB_1}{OA} =$$

$$= \frac{OC}{OA} = 2\,\frac{OD}{OA} = 2\,Sq.$$

Es ist nämlich das Parallelogramm, auf OB und OB_1 construirt, ein gleichseitiges,

dessen Diagonalen die Winkel und auszerdem einander senkrecht halbiren. Die Diagonale OC fällt demnach längs OA und man erhält $OC = 2\,OD$.

Es kann jedoch die Formel (*b.* 107) wie nachstehend bewiesen werden mit Hülfe der Figur 44, und dieser Beweis führt zugleich auf die nützliche Relation (*b.* 108).



$$Kq = \frac{OB_1}{OA} = \frac{OD + DB_1}{OA} = \frac{OD + OB_1'}{OA} = \frac{OD - OB'}{OA} = \frac{OD}{OA} - \frac{OB'}{OA} = Sq - Vq$$

oder kurz

$$Kq = Sq - Vq. \quad . \ (b.\ 108)$$

Addirt man diese Formel zu

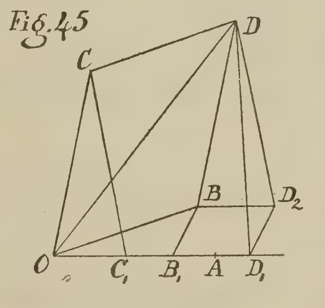
$$q = Sq + Vq,$$

so ergibt sich (*b.* 107).

12⁰.

$$S(q + q') = Sq + Sq' \ldots\ldots, \ldots \ (b.\ 109)$$

Wir wollen diesen Satz mit Hülfe der Figur 45 dartun. Es sei in derselben $q = OB : OA$, $q' = OC : OA$; wir construiren das Parallelogramm OBDC und projiciren die Punkte B, D, C sämtlich auf OA in B_1, D_1, C_1 bzhw. Die Geraden CC_1, DD_1, BB_1 werden im allgemeinen nicht parallel sein. Weiter ziehen wir $BD_2 \parallel OA$ und projiciren D auf BD_2 in D_2. Es ist sodann $DD_1 \perp OA$, und deshalb $DD_1 \perp BD_2$ und auch ist $DD_2 \perp BD_2$, woraus folgt $BD_2 \perp D_2D_1$ oder $D_2D_1 \parallel BB_1$. Das Viereck $BD_2D_1B_1$ ist somit ein Parallelogramm und $B_1D_1 = BD_2$.



Es ist aber weiter $\triangle OCC_1 \cong \triangle BDD_2$ ($OC = BD$, $\angle COC_1 = \angle DBD_2$, $\angle CC_1O = \angle DD_2B = \frac{\pi}{2}$) und deshalb $BD_2 = OC_1$; hierdurch wird auch $B_1D_1 = OC_1$. Nun ist noch

$$OD_1 = OB_1 + B_1D_1 = OB_1 + OC_1$$

und indem durch OA dividirt wird, erhält man hieraus den Satz (*b.* 109).

Die Formel (*b.* 109) lässt sich leicht verallgemeinern zur nachstehenden

$$S\Sigma q = \Sigma Sq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 109^*)$$

z. B. $S(q + q' + q'') = S\{(q + q') + q''\} = S(q + q') + Sq'' =$
$= Sq + Sq' + Sq''$.

13°. $$S(q - q') = Sq - Sq' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 110)$$

$S(q - q') = S\{q + (-q')\} = Sq + S(-q') =$
$= Sq + (-Sq')$ nach $(b.\ 102^*) = Sq - Sq'$.

62. Den Begriff des Skalarteils eines Quaternions wollen wir auch noch dazu verwenden eine unsrer vorher erhaltenen Formeln zu vereinfachen. Es ist dies die Relation (*b.* 41), welche wir in Art. 40 fanden:

$$N(q + q') = Nq + Nq' + 2\ Tq Tq' \cos \angle B'OB$$

wenn

$$q = OB : OA \text{ und } q' = OB' : OA.$$

Zuerst wollen wir beachten, dass in diesem Falle nach (*b.* 67)

$$\frac{q}{q'} = \frac{OB}{OA} : \frac{OB'}{OA} = \frac{OB}{OB'},$$

wodurch es möglich wird $\angle B'OB$ durch $\angle \frac{q}{q'}$ oder $\angle \frac{q'}{q}$ zu ersetzen. Wir erhalten dadurch

$$N(q + q') = Nq + Nq' + 2\ Tq\ Tq' \cos \angle \frac{q}{q'} \quad \ldots \quad (b.\ 111)$$

Es ist jedoch nach (*b.* 99)

$$S\frac{q}{q'} = T\frac{q}{q'} \cos \angle \frac{q}{q'} = \frac{Tq}{Tq'} \cos \angle \frac{q}{q'}$$

und hiermit geht (*b.* 111) über in:

$$N(q + q') = Nq + Nq' + 2\ Nq'.\ S\frac{q}{q'} \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 112)$$

Man hätte in gleicher Weise erhalten können, indem $\angle B'OB$ durch $\angle \frac{q'}{q}$ ersetzt würde,

$$N(q + q') = Nq + Nq' + 2\ Nq.\ S\frac{q'}{q}.$$

Die Formel (b. 112) ergibt weiter, indem man beachtet, dass

$$qKq' = q\frac{Nq'}{q'} \text{ nach } (b.24^*) = Nq'\frac{q}{q'} \quad \ldots\ldots (b.113)$$

und deshalb auch

$$S(qKq') = Nq'.S\frac{q}{q'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.114)$$

$$N(q+q') = Nq + Nq' + 2\,S(qKq') \quad \ldots\ldots (b.115)$$

eine Beziehung, in welcher q und q' umgetauscht werden können.

Als besonderer Fall ergibt sich aus (b. 115), wenn x ein positiver oder negativer Skalar ist

$$N(q+x) = Nq + x^2 + 2\,x\,Sq \quad \ldots\ldots (b.116)$$

und hieraus für einen rechten Quotienten r

$$N(r+x) = Nr + x^2 \quad \ldots\ldots\ldots (b.116^*)$$

63. Wir wollen nunmehr den Vektorteil Vq näher in Betracht ziehen.

Wie unmittelbar aus der Definition dieses Symbols erhellt, ist

$$Ax.Vq = Ax.q \text{ und } \angle\, Vq = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots (b.117)$$

Und weil Vq ein rechter Quotient ist, so ist nach (b. 74)

$$KVq = -\,Vq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.118)$$

Indem man wieder V^2q statt $V(Vq)$ schreibt, und in analogem Sinne das Symbol V^mq verwendet, ersieht man leicht

$$V^mq = Vq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.119)$$

wo m eine ganze Zahl sein soll.

Wir fanden schon bei dem Beweise der Formel (b. 107), dass der Vektorteil des conjugirten Quaternions der Negative des Vektorteils des Quaternions q ist oder

$$VKq = -\,Vq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.120)$$

und indem man dieses Resultat mit (b. 118) verknüpft

$$VKq = KVq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.121)$$

Die Symbole V, K, nach einander angewandt, sind deshalb commutativ.

Suchen wir $V\frac{1}{q}$ auszudrücken und benutzen wir dazu die Gleichung (b. 24*).

Es wird dadurch gefunden:

$$V\frac{1}{q} = \frac{1}{Nq}\ VKq = -\frac{Vq}{Nq} \text{ oder kurz } V\frac{1}{q} = -\frac{Vq}{Nq}. \quad (b.\ 121^*)$$

Es wird weiter

$$Vxq = xVq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 122)$$

Wenn nämlich der Vektor OB geändert wird, so erfährt die projicirende Gerade BB_1 eine Änderung in demselben Verhältnis (Figur 46), und deshalb ist

$$Vxq = V\frac{x.OB}{OA} = \frac{x.OB_2}{OA} = x.Vq.$$

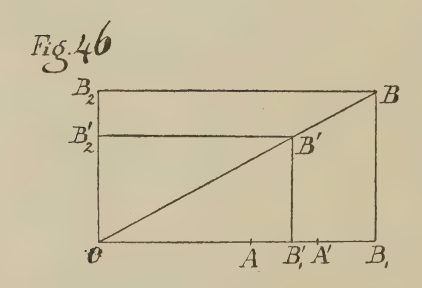
Als besonderer Fall ergibt sich noch

$$V(-q) = -Vq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 122^*)$$

Eine sehr wichtige Grösze ist das Symbol UVq. Weil Vq ein rechter Quotient ist in der Ebene von q, so ist UVq ein rechter Radial in dieser Ebene. Nach der Formel ($b.$ 117) und Art. 30 wird

$$Ax.UVq = Ax.q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 123)$$

sein.



Betrachten wir weiter das Symbol VUq (Figur 46). Wenn $q = OB : OA$, und OA′ und OB′ Einheitsvektoren in den Richtungen OA, OB sind, so ist

$$Uq = OB' : OA'$$

und

$$VUq = OB_2' : OA'.$$

Es ist somit VUq kein rechter Radial, sondern ein rechter Quotient in der Ebene des Quaternions q, dessen Achse mit $Ax.q$ zusammenfällt und nur wenn q ein rechter Quotient ist, wird VUq einen rechten Radial vorstellen. Man kann deshalb im allgemeinen die Ungleichheit hinschreiben

$$VUq \gtrless UVq, \text{ ausgenommen wenn } \angle q = \frac{\pi}{2}.$$

Man erhält nun die beiden nachstehenden Ausdrücke für Vq.

$$Vq = TVqUVq = Tq \sin \angle q.UVq \quad \ldots \quad (b.\ 124)$$

und

$$Vq = TqVUq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 125)$$

Die Formel (*b.* 124) zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, dass

$$TVq = Tq \sin \angle q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\,126)$$

und dies geschieht leicht mit Hülfe der Figur 46. Es ist nämlich

$$TVq = T\frac{OB_2}{OA} = \frac{T.OB_2}{T.OA} = \frac{T.OB}{T.OA}\,\frac{T.OB_2}{T.OB} = Tq \sin \angle q.$$

Der Beweis der Formel (*b.* 125) ist:

$$Vq = V(Tq\,Uq) = Tq\,VUq \text{ nach } (b.\,122)$$

Aus der Formel (*b.* 125) in Verbindung mit (*b.* 16) erfolgt noch

$$TVq = Tq\,TVUq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\,127)$$

und indem man diese Formel mit (*b.* 126) vergleicht, erhält man

$$TVUq = \sin \angle q. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\,128)$$

ein Resultat, das auch leicht mit Hülfe der Figur 46 verificirt werden kann. Denn es ist

$$VUq = OB_2' : OA'$$

und demnach

$$TV\,Uq = \frac{T.OB_2'}{T.OA'} = \frac{T.OB_2'}{T.OB'} = \sin \angle q.$$

Weil UVq ein rechter Radial ist in der Ebene von q, so muss $(UVq)^2$ bewirken, dass ein Vektor in der Ebene von q eine Drehung um zwei rechte Winkel erfährt, d. h. entgegengesetzte Richtung erhält. Es ist deshalb dieses Symbol mit — 1 identisch oder

$$(UVq)^2 = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\,129)$$

und hiermit erhält man leicht

$$(Vq)^2 = (TVq\;UVq)^2 = (TVq)^2\,(UVq)^2 = -(TVq)^2 = -NVq$$

oder, indem man noch Vq^2 als gleichbedeutend mit $(Vq)^2$ annimmt,

$$Vq^2 = (Vq)^2 = -NVq \quad \ldots\ldots\ldots (b.\,130)$$

Eine andere sehr nützliche Formel entsteht aus der Verknüpfung der Gleichungen (*b.* 94) (*b.* 108) oder

$$q = Sq + Vq, \quad Kq = Sq - Vq.$$

Durch Subtraction wird nämlich erhalten

$$q - Kq = 2\,Vq \text{ oder symbolisch } 1 - K = 2\,V, \text{ oder}$$

$$V = \tfrac{1}{2}(1 - K) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\,131)$$

In gleicher Weise kann man die Formeln ($b.$ 99) und ($b.$ 126) combiniren und erhält daraus durch Quadriren und Addiren

$$(Sq)^2 + (TVq)^2 = Tq^2 \ldots\ldots\ldots (b.\,132)$$

Nach ($b.$ 130) ist aber $(TVq)^2$ oder $NVq = - Vq^2$, und somit wird, wenn wir noch die Schreibweise

$$Sq^2 = (Sq)^2 \ldots\ldots\ldots (b.\,133)$$

einführen, erhalten

$$Sq^2 - Vq^2 = Tq^2 \ldots\ldots\ldots (b.\,134)$$

In andrer Gestalt lautet diese Gleichung

$$Sq^2 = Tq^2 + Vq^2 = Nq - NVq \ldots\ldots (b.\,135)$$

Weil Sq eine skalare Grösze ist, so kann Sq^2 durch NSq ersetzt werden und dadurch geht die vorige Gleichung über in

$$NSq = Nq - NVq$$

oder

$$Nq = NSq + NVq,$$

eine Gleichung, die keineswegs als unmittelbare Folge der Gleichung ($b.$ 94) betrachtet werden kann, weil im allgemeinen

$$N(q + q') \gtrless Nq + Nq'.$$

Es hätte dieselbe jedoch leicht aus ($b.$ 116*) erhalten werden können, indem man darin r durch Vq, und x durch Sq ersetzt hätte.

Noch eine äusserst wichtige Formel ist durch die Combination dreier anderen zu erhalten, nämlich aus ($b.$ 94), ($b.$ 99) und ($b.$ 124). Dieselbe lautet

$$q = Tq\,(\cos \angle q + \sin \angle q . UVq) \ldots\ldots (b.\,136)$$

und kann unmittelbar aus den drei genannten Gleichungen gefolgert werden.

Mit Hülfe der Figur 45, können wir beweisen

$$V(q + q') = Vq + Vq' \ldots\ldots\ldots (b.\,137)$$

Denn es wird

$$V(q + q') = V\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{D_1D}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{D_1D_2 + D_2D}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{B_1B + C_1C}}{\mathrm{OA}} =$$

$$= \frac{\mathrm{B_1B}}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{C_1C}}{\mathrm{OA}} = Vq + Vq'.$$

Es lässt sich diese Formel wieder verallgemeinern zur nachstehenden:

$$V(q + q' + q'' + \ldots) = Vq + Vq' + Vq'' + \ldots \text{ oder}$$
$$V\Sigma q = \Sigma Vq \ldots\ldots\ldots\ldots (b. 138)$$

Und weiter kann man erhalten

$$V(q - q') = Vq - Vq' \ldots\ldots\ldots (b. 139)$$

weil

$$V(q - q') = V\{q + (-q')\} = Vq + V(-q') \text{ nach } (b. 137) =$$
$$= Vq + (-Vq') \text{ nach } (b. 122^*) = Vq - Vq'.$$

64. Im Art. 57 hatten wir Gelegenheit zu beweisen, dass die Multiplikation *rechter* Quaternionen in Bezug auf jeden der beiden Faktoren distributiv ist.

In diesem Artikel wollen wir zeigen, dass dieselbe Eigenschaft bei der Multiplikation solcher Quaternionen gültig ist, deren Ebenen eine Gerade gemeinsam ist. Es sind diese Quaternionen collinear genannt worden. Wir setzen voraus im nachfolgenden seien q, q', q'' collineare Quaternionen.

In der Figur 47 mögen $\mathrm{OB} : \mathrm{OA} = q'$, $\mathrm{OC} : \mathrm{OA} = q''$ angenommen werden, wo demnach OA ein Vektor in der Richtung der den Ebenen der Quaternionen q' und q'' gemeinsamen Geraden ist. Wir construiren das Parallelogramm OBDC, so wird

$$q' + q'' = \mathrm{OD} : \mathrm{OA}.$$

Nun setzen wir weiter voraus, dass q auf den Zähler OA reducirt ist, was, unsrer Voraussetzung der Collinearität gemäsz, stets möglich ist, und es sei demnach

$$q = \mathrm{OA} : \mathrm{OE}.$$

Fig. 47

Es wird hierdurch

$$(q' + q'')q = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}} \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OE}} = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OE}} =$$
$$= \frac{\mathrm{OB} + \mathrm{OC}}{\mathrm{OE}} =$$
$$= \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OE}} + \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OE}}$$

oder

$$(q' + q'')q = q'q + q''q \text{ wenn } q, q', q'' \text{ collinear} \ldots (b. 140)$$

Wenn man mit k, k', k'' die Conjugirten der Quaternionen q, q', q'' bzhw. bezeichnet, so sind dieselben ebenfalls collinear,

weil ein Quaternion und dessen Conjugirte in derselben Ebene enthalten sind.

Nach (b. 140) gilt deshalb auch der Satz

$$(k' + k'')\,k = k'k + k''k$$

und sodann

$$K(k' + k'')\,k = K(k'k + k''k)$$

Berücksichtigt man nunmehr die Relationen (b. 54), (b. 42), so wird

$$Kk.K(k' + k'') = K.k'k + K.k''k = Kk\,Kk' + Kk\,Kk''$$

oder

$$q(q' + q'') = qq' + qq'' \text{ wenn } q,\ q',\ q'' \text{ collinear} \ldots (b.\,141)$$

Es wird, den Gleichungen (b. 140) (b. 141) zufolge, nun auch ganz allgemein, wenn q', q'', q''', ... q_1, q_2, q_3 .... collineare Quaternionen sind,

$$(q' + q'' + \ldots)(q_1 + q_2 + \ldots) = \Sigma\, q'q_1 \ldots (b.\,142)$$

wo das Zeichen Σ bedeutet, dass jede der Gröszen q', q''.... durch jeden der Quaternionen $q_1, q_2 \ldots$ multiplicirt werden soll.

65. Die Verknüpfung der Resultate des vorigen Artikels mit denen des Art. 57 setzt uns in den Stand zu beweisen, dass auch für willkürliche Quaternionen die drei Relationen stattfinden:

$$(q' + q'')\,q = q'q + q''q \ldots\ldots\ldots (b.\,143)$$

$$q\,(q' + q'') = qq' + qq'' \ldots\ldots\ldots (b.\,144)$$

$$(q' + q'' + \ldots)(q_1 + q_2 + \ldots) = \Sigma\, q'q_1 \ldots (b.\,145)$$

Und es wird ausreichen die Formel (b. 143) zu beweisen, weil die beiden anderen Formeln aus jener auf dieselbe Weise hergeleitet werden können, wie die beiden Gleichungen (b. 141), (b. 142) aus (b. 140) hergeleitet worden sind.

Um den Nachweis der Formel (b. 143) zu liefern, fangen wir damit an zu erinnern, dass die Ebene des Skalarteils eines Quaternions unbestimmt ist, sodass man jede willkürliche Ebene dazu wählen kann. Wählt man deshalb als die Ebenen der Gröszen Sq', Sq diejenigen der Vektorteile Vq', Vq, bzhw. so hat man es bei Sq', Vq', Sq, Vq mit vier collinearen Quaternionen zu tun und es wird nunmehr die allgemein gültige Formel erhalten

$$q'q = (Sq' + Vq')(Sq + Vq)$$
$$= Sq'Sq + Sq'Vq + Vq'Sq + Vq'Vq \text{ nach } (b.\,142)$$

oder weil die Skalarteile mit einander und mit den Vektorteilen commutativ sind

$$q\,q = Sq'Sq + Sq'Vq + Sq\,Vq' + Vq'Vq \ldots (b.\,146)$$

Wendet man dieselbe Formel bei $(q' + q'')q$ an, so wird erhalten

$$(q' + q'')q = S(q' + q'')\,Sq + S(q' + q'')\,Vq + Sq\,V(q' + q'') + $$
$$+ V(q' + q'')\,Vq,$$
$$= (Sq' + Sq'')Sq + (Sq' + Sq'')\,Vq + Sq(Vq' + Vq'') +$$
$$+ (Vq' + Vq'')\,Vq, \text{ nach } (b.\,109)\,(b.\,137)$$
$$= Sq'Sq + Sq''Sq + Sq'Vq + Sq''Vq + Sq\,Vq' + Sq\,Vq'' +$$
$$+ Vq'Vq + Vq''Vq, \text{ nach } (b.\,29)\,(b.\,30)\,(b.\,91)$$
$$= \{Sq'Sq + Sq'Vq + Sq\,Vq' + Vq'Vq\} + \{Sq''Sq +$$
$$+ Sq''Vq + Sq\,Vq'' + Vq''Vq\}, \text{ nach } (b.\,26)\,(b.\,27)$$
$$= q'q + q''q, \text{ nach } (b.\,146).$$

Die Relationen ($b.$ 143) ($b.$ 144) ($b.$ 145) sagen aus, dass das distributive Princip bei der Multiplikation von Quaternionen allgemein gültig ist. Es ist dies eine sehr wichtige Errungenschaft.

66. Es mögen in diesem Artikel noch einige Formeln Platz finden, zu denen die Ergebnisse der vorhergehenden Artikel uns führen.

Aus ($b.$ 75) oder

$$rr' = K.r'r,$$

erhält man durch beiderseitige Addition von $r'r$

$$rr' + r'r = r'r + K.r'r = (1 + K)\,r'r = 2\,Sr'r \text{ nach } (b.\,107)$$

oder kürzer

$$S.r'r = \tfrac{1}{2}\,(rr' + r'r) \ldots\ldots\ldots (b.\,146)$$

Hätte man zu ($b.$ 75) beiderseits $r'r$ nicht addirt, sondern subtrahirt, so wäre entstanden

$$r'r - rr' = r'r - K.r'r = (1 - K)r'r = 2\,V.r'r \text{ nach } (b.\,131)$$

oder

$$V.r'r = \tfrac{1}{2}\,(r'r - rr') \ldots\ldots\ldots (b.\,147)$$

Aus den erhaltenen Formeln ($b.$ 146) ($b.$ 147) lässt sich auch schlieszen

$$\left.\begin{array}{l} S.r'r = S.rr' \\ V.r'r = - V.rr' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 148)$$

Es seien q, q' wieder willkürliche Quaternionen. Nimmt man von den beiden Seiten der Gleichung ($b.$ 146) die Skalarteile, welche einander gleich sein müssen, und ebenso die Vektorteile, so wird erhalten

$$\left.\begin{array}{l} S.q'q = Sq'Sq + S(Vq'Vq) \\ V.q'q = Sq'Vq + SqVq' + V(Vq'Vq) \end{array}\right\} \ldots \quad (b.\ 149)$$

Wenn man in ($b.$ 146) $q' = q$ annimmt, so geht die Gleichung über in

$$q^2 = Sq^2 + 2\,SqVq + Vq^2 \ldots\ldots \quad (b.\ 150)$$

oder

$$q^2 = Sq^2 + 2\,SqVq - NVq \text{ nach } (b.\ 130)$$

und dadurch werden die Gleichungen ($b.$ 149) zu den nachstehenden

$$\left.\begin{array}{l} S.q^2 = Sq^2 - NVq \\ V.q^2 = 2\,SqVq \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 151)$$

Aus ($b.$ 146) oder

$$q'q = Sq'Sq + Sq'Vq + SqVq' + Vq'Vq$$

und

$$qq' = SqSq' + Sq'Vq + SqVq' + VqVq'$$

erfolgt durch Addition und Subtraction

$$q'q + qq' = 2\,(SqSq' + Sq'Vq + SqVq') + 2\,S(VqVq') \text{ nach } (b.146)$$
$$q'q - qq' = Vq'Vq - VqVq' = 2\,V(Vq'Vq) \qquad \text{nach } (b.147)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(q'q + qq') = SqSq' + Sq'Vq + SqVq' + S(VqVq') \\ \frac{1}{2}(q'q - qq') = V(Vq'Vq) \end{array}\right\} . \quad (b.\ 152)$$

Ein anderer wichtiger Schlusz kann aus ($b.$ 149) gezogen werden. Wenn man darin q' und q mit einander verwechselt und beachtet, dass nach ($b.$ 148)

$$S(Vq'Vq) = S(VqVq'),$$

so erhält man aus der ersten dieser Gleichungen

$$S.q'q = S.qq' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 153)$$

Dasselbe Verfahren, auf die zweite der Gleichungen ($b.$ 149) angewandt, in Verbindung mit ($b.$ 148) ergibt

$$V.q'q \gtrless V.qq' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 154)$$

Die Gleichung (b. 153) kann auch auf andre Weise erhalten werden.

Nach (b. 99), ist nämlich

$$S.q'q = Tq'q \cos \angle q'q$$
$$S.qq' = Tqq' \cos \angle qq'$$

Die zweiten Seiten sind nach (b. 48) (b. 57) einander gleich, somit auch die ersten.

67. Die Zerlegung eines Quaternions in einen Skalar- und einen Vektorteil können wir auch dazu verwenden, die Gültigkeit des commutativen und associativen Princips bei der Addition mehrerer Quaternionen darzutun, ein Beweis, welchen wir im Art. 37 hier zu geben versprachen.

Es gilt zu zeigen, dass allgemein

$$\left.\begin{array}{l} q+q'+q''+q'''+\ldots = q+q'''+q'+q''+\ldots \\ q+q'+q''+q'''+\ldots = q+q'+(q''+q''')+\ldots \end{array}\right\} \quad (b.\ 155)$$

Nach (b. 94) ist

$$q+q'+q''+q'''+\ldots = S(q+q'+q''+q'''+\ldots)+V(q+q'+q''+q'''+\ldots)$$

Nun ist jedoch

$$S(q+q'+q''+q'''+\ldots) = Sq+Sq'+Sq''+Sq'''+\ldots \text{ nach } (b.\ 109^*)$$
$$= Sq+Sq'''+Sq'+Sq''+\ldots$$

oder

$$= Sq+Sq'+(Sq''+Sq'''+\ldots)$$

nach (b. 29*), wenn hierin die Grösze q durch die Einheit ersetzt wird. Und hierdurch ist weiter

$$\left.\begin{array}{l} S(q+q'+q''+q'''+\ldots) = S(q+q'''+q'+q''+\ldots) \\ \text{oder} \\ \qquad = S[q+q'+(q''+q'''+\ldots)] \end{array}\right\} (b.\ 155^*)$$

Weil aber

$$IV(q+q'+q''+q'''+\ldots) = I(Vq+Vq'+Vq''+Vq'''+\ldots)$$
nach (b. 138)
$$= IVq+IVq'+IVq''+IVq'''+\ldots$$
nach (b. 86)
$$= IVq+IVq'''+IVq'+IVq''+\ldots$$
nach (a. 1)
$$= IV(q+q'''+q'+q''+\ldots)$$

und

$$IV(q+q'+q''+q'''+\ldots) = IVq + IVq' + IVq'' + IVq''' + \ldots$$
$$= IVq + IVq' + (IVq'' + IVq''' + \ldots)$$
nach (a. 2)
$$= IVq + IVq' + IV(q'' + q''' + \ldots)$$
nach (b. 86), (b. 138)
$$= IV[q + q' + (q'' + q''' + \ldots)]$$

so kann nach (b. 81) geschlossen werden

$$V(q+q'+q''+q'''+\ldots) = V(q+q'''+q'+q''+\ldots)$$

oder

$$= V[q+q'+(q''+q'''+\ldots)]$$

und aus diesen Gleichungen in Verbindung mit (b. 155*) und dem umgekehrten des Satzes (b. 95) folgen die Relationen (b. 155).

68. Zurückführung eines Quaternions auf die viergliedrige Grundform.

Nach allem Bisherigen können wir einen Satz begründen, der unter dem in der Überschrift dieses Artikels enthaltenen Namen bekannt ist und welcher eine so grosze Bedeutung für die Theorie und die Anwendungen hat, dass manchmal die Ansicht ausgesprochen ist, derselbe sei als Definition der Quaternionen zu verwenden. Wir haben indessen vorgezogen eine mehr an die geometrischen Begriffe sich anschliessende Definition zu benutzen.

Unser Ausgangspunkt sei die Gleichung (b. 94)

$$q = Sq + Vq$$

Beachten wir, dass Vq ein rechter Quotient ist, und dass derselbe nach (b. 90) als Summe Vielfächer der drei rechten Radiale i, j, k dargestellt werden kann, so erhält man, indem noch gesetzt wird

$$Sq = w,$$

$$q = w + xi + yj + zk \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,156)$$

wo w, x, y, z irgend welche positive oder negative Skalare sein können.

Es ist diesem viergliedrigen Ausdruck gemäsz der Name »Quaternion'' entstanden.

69. Es wird seinen Nutzen haben, die wichtigeren der bisher vorgekommenen Gröszen mit Hülfe der eingeführten Skalare w, x, y, z und der rechten Radiale i, j, k auszudrücken;

man erhält dabei nach den Definitionen

1⁰. $$Sq = w \quad \ldots \quad (b.\ 157)$$

2⁰. $$Vq = xi + yj + zk \quad \ldots \quad (b.\ 158)$$

3⁰. $$TVq = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \ldots \quad (b.\ 159)$$

Denn es ist $TVq = TIVq$ und nach Art. 56 hat IVq die Componenten xIi, yIj, zIk, deren Tensoren x, y, z bzhw. sind; weil diese Componenten sämtlich unter sich rechtwinklig sind, so ist deshalb

$$(TIVq)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Er erfolgt hieraus noch:

$$NVq = x^2 + y^2 + z^2$$

4⁰. $$Vq^2 = -(x^2 + y^2 + z^2) \text{ nach } (b.\ 130) \quad \ldots \quad (b.\ 160)$$

5⁰. $$UVq = \frac{Vq}{TVq} = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots \quad (b.\ 161)$$

6⁰. $$\left.\begin{aligned} Nq &= w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \text{ nach } (b.\ 135) \\ Tq &= \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (b.\ 162)$$

7⁰. $$Uq = \frac{q}{Tq} = \frac{w + xi + yj + zk}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots \quad (b.\ 163)$$

8⁰. $$VUq = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots \quad (b.\ 164)$$

9⁰. $$\cos \angle q = \frac{Sq}{Tq} = \frac{w}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots \quad (b.\ 165)$$

10⁰. $$\frac{1}{q} = \frac{1}{w + xi + yj + zk} = \frac{w - xi - yj - zk}{(w + xi + yj + zk)(w - xi - yj - zk)}$$

nach ($b.$ 73*)

oder in Übereinstimmung mit ($b.$ 24)

$$\frac{1}{q} = \frac{w - xi - yj - zk}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad \ldots \quad (b.\ 166)$$

Denn es ist

11⁰. $$Kq = Sq - Vq = w - xi - yj - zk \quad \ldots \quad (b.\ 167)$$

70. Wenn Quaternionen in der viergliedrigen Grundform gegeben sind, so lässt sich deren Summe und deren Differenz leicht in derselben Gestallt angeben. Ist nämlich

$$q = w + xi + yj + zk, \quad q' = w' + x'i + y'j + z'k,$$
$$q'' = w'' + x''i + y''j + z''k, \text{ u. s. w.}$$

so ist nach ($b.$ 168) in Verbindung mit ($b.$ 29*)

$$q + q' + q'' + \ldots = w + w' + w'' \ldots + (x + x' + x'' + \ldots)\, i + \\ + (y + y' + y'' + \ldots)\, j + \\ + (z + z' + z'' + \ldots)\, k.$$

71. Wenn zwei Quaternionen

$$q = w + xi + yj + zk \text{ und } q' = w' + x'i + y'j + z'k$$

einander gleich sind, so lassen sich hieraus die vier Skalargleichungen folgern:

$$w = w', \ x = x', \ y = y', \ z = z' \quad \ldots\ldots \ (b.\ 168)$$

Denn wenn

$$q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}, \ q' = \mathrm{OB}' : \mathrm{OA}',$$

so müssen, damit $q = q'$ sein kann, OA, OB, O'A', O'B' complanar sein, und weiter

$$\angle \mathrm{BOA} = \angle \mathrm{B'O'A'} \text{ und } T.\mathrm{OB} : T.\mathrm{OA} = T.\mathrm{O'B'} = T.\mathrm{O'A'}.$$

Fällt man sodann die Senkrechten $\mathrm{BB_1}$, $\mathrm{B'B_1{}'}$ auf OA, O'A bzhw., so werden die Dreiecke $\mathrm{OBB_1}$, $\mathrm{O'B'B_1{}'}$ ähnlich sein, weil

$$\angle \mathrm{BOA} = \angle \mathrm{B'O'A'},$$

$$\angle \mathrm{OB_1B} = \angle \mathrm{O'B'_1B'} = \frac{\pi}{2}$$

und dadurch wird:

$$T.\mathrm{OB_1} : T.\mathrm{O'B_1{}'} = \\ = T.\mathrm{OB} : T.\mathrm{O'B'} = \\ = T.\mathrm{OA} : T.\mathrm{O'A'}$$

oder

$$T.\mathrm{OB_1} : T.\mathrm{OA} = T.\mathrm{O'B_1{}'} : T.\mathrm{O'A'}.$$

Hiermit ist bewiesen, dass die Skalarteile der beiden Quaternionen einander gleich sein müssen, oder $w = w'$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\mathrm{OBB_1}$, $\mathrm{O'B'B_1{}'}$ folgt aber auch unmittelbar, dass die Vektorteile der beiden Quaternionen $\mathrm{BB_1} : \mathrm{OA}$ und $\mathrm{B'B_1{}'} : \mathrm{O'A'}$ ebenfalls nicht verschieden sein können, denn es ist

$$\frac{\mathrm{BB_1}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{BB_1}}{\mathrm{OB_1}}\,\frac{\mathrm{OB_1}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{BB_1}}{\mathrm{OB_1}}\, Sq, \quad \frac{\mathrm{B'B_1{}'}}{\mathrm{OA'}} = \frac{\mathrm{B'B_1{}'}}{\mathrm{OB_1{}'}}\, Sq'$$

und nach Art. 29 musz $\mathrm{BB_1} : \mathrm{OB_1} = \mathrm{B'B_1{}'} : \mathrm{OB_1{}'}$ sein, während auch $Sq = Sq'$.

Es wird deshalb auch die Gleichung stattfinden

$$xi + yj + zk = x'i + y'j + z'k$$

oder

$$(x - x')\,i + (y - y')\,j + (z - z')\,k = 0.$$

Wären nun die letzten drei der Gleichungen (b. 168) nicht gültig, so würde man aus dieser Relation herleiten können:

$$I\,[(x - x')\,i + (y - y')\,j + (z - z')\,k] = 0$$

oder

$$I.(x - x')\,i + I.(y - y')\,j + I.(z - z')\,k = 0 \text{ nach } (b.\,86)$$

oder

$$(x - x')\,Ii + (y - y')\,Ij + (z - z')\,Ik = 0 \text{ nach } (b.\,82)$$

oder endlich mit den Bezeichnungen der Artikel 54, 58:

$$(x - x')\,\mathrm{OI} + (y - y')\,\mathrm{OJ} + (z - z')\,\mathrm{OK} = 0$$

und diese Gleichung würde nach Art. 2 aussagen, dass die drei Einheitsvektoren OI, OJ, OK complanar sind, ein Schlusz mit unsrer Voraussetzung, OI, OJ, OK seien unter sich rechtwinklig, streitig.

Es müssen somit auch die letzten drei der Relationen (b. 168) stattfinden.

72. Eine Anwendung der Einführung der viergliedrigen Grundform kann man finden in einem neuen Beweis der Gültigkeit des associativen Princips bei der Quaternionenmultiplikation.

Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} q &= w + xi + yj + zk \\ q' &= w' + x'i + y'j + z'k \\ q'' &= w'' + x''i + y''j + z''k \end{aligned}$$

und berechnet mit Hülfe des schon bewiesenen distributiven Princips (Art. 65) die beiden Ausdrücke $q(q'q'')$ und $(qq')q''$, so wird man in der Tat dasselbe Resultat erhalten, wodurch die Identität dieser Ausdrücke dargetan ist.

Wir unterlassen die Berechnung hier; allein wollen wir die Formel für das Produkt zweier Quaternionen, des frequenten Nutzens wegen, hier hinschreiben

$$\begin{aligned} qq' = ww' - xx' - yy' - zz' &+ i\,(w'x + wx' + yz' - y'z) + \\ &+ j\,(w'y + wy' + zx' - z'x) + \\ &+ k\,(w'z + wz' + xy' - x'y) \quad . \; . \; (b.169) \end{aligned}$$

Das Quadrat eines Quaternions im besonderen wird

$$q^2 = w^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2\,wxi + 2wyj + 2\,wzk. \; . \; . \; (b.\,170)$$

73. **Proportionen mit Quaternionen.** Wenn wir vier Quaternionen q, q', q'', q''' wählen, die der Relation genügen

$$q : q' = q'' : q''' \text{ oder } \frac{q}{q'} = \frac{q''}{q'''} \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 171)$$

so sollen dieselben proportional genannt werden.

Weil $\frac{q}{q'}$ und $\frac{q''}{q'''}$ Quaternionen sind, so kann nach Art. 29 die Beziehung ($b.$ 171) nur stattfinden, falls

$$T\frac{q}{q'} = T\frac{q''}{q'''} \text{ oder } Tq : Tq' = Tq'' : Tq''' \text{ nach } (b.\ 69) \quad . . \quad (b.\ 172)$$

und

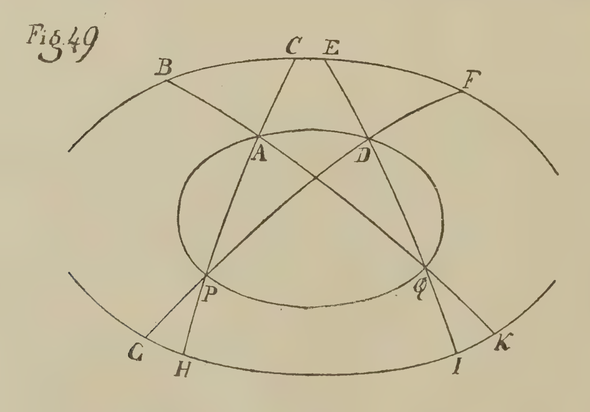
$$U\frac{q}{q'} = U\frac{q''}{q'''} \text{ oder } Uq : Uq' = Uq'' : Uq''' \text{ nach } (b.\ 70) \quad . \quad (b.\ 173)$$

Wir wollen uns in diesem Artikel mit einigen wenigen Eigenschaften dieser Proportionen beschäftigen.

Nach ($b.$ 72) in Verbindung mit dem Satze: wenn $q = q'$, so ist auch $\frac{1}{q} = \frac{1}{q'}$, erfolgt aus ($b.$ 171) unmittelbar

$$\frac{q'}{q} = \frac{q'''}{q''} \text{ wenn } \frac{q}{q'} = \frac{q''}{q'''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 174)$$

Wenn wir die Einheitskugel, deren wir uns vorher schon bedienten, construirt denken, so sei auf derselben (Figur 49)



$$\overset{\frown}{AB} = Uq, \quad \overset{\frown}{AC} = Uq'$$

und deshalb wird

$$\frac{Uq}{Uq'} = Uq \frac{1}{Uq'}$$

eine Drehung von C nach A, gefolgt von einer Drehung von A nach B, d. h. den Vektorbogen $\widehat{CB}$ bedeuten. Es sei weiter

$$\widehat{DE} = Uq'', \ \widehat{DF} = Uq''',$$

so wird

$$Uq'' : Uq''' = \widehat{FE}.$$

Nach der gegebenen Proportionalität der Gröszen q, q', q'', q''' müssen $\widehat{CB}$ und $\widehat{FE}$ Teile eines einzigen gröszten Kreises sein, und $\widehat{CB} = \widehat{FE}$. In der Figur 49 sei dies angenommen. Es wird dadurch auch $\widehat{BE} = \widehat{CF}$ sein.

Wenn wir die Bogen $\widehat{BA}$ und $\widehat{ED}$ verlängern bis über den Schnittpunkt Q derselben hinaus, und ebenso $\widehat{CA}$ und $\widehat{FD}$ über ihren Schnittpunkt P hinaus, so wird ein sphaerischer Kegelschnitt construirt werden können, welcher durch A, D, Q, P geht und von welchem $\widehat{BF}$ einer der cyclischen Bogen ist. Indem man nämlich $\widehat{PH} = \widehat{CH}$ und $\widehat{QK} = \widehat{BA}$ nimmt, werden zwei Punkte H, K erhalten, die einen gröszten Kreis bestimmen und es ist leicht ersichtlich, dass der sphaerische Kegelschnitt, dessen cyclische Bogen $\widehat{BF}$ und $\widehat{HK}$ sind, und welcher durch den Punkt A hindurchgeht, auch weiter durch P, Q, D gehen musz; durch P und Q, weil $\widehat{PH} = \widehat{AC}$ und $\widehat{QK} = \widehat{BA}$, durch D wegen des nachstehenden indirekten Beweises.

Gesetzt der Kegelschnitt ginge nicht durch den Punkt D von $\widehat{PF}$, sondern durch einen anderen Punkt D' desselben Bogens, so könnte man $\widehat{QD'}$ ziehen, welcher $\widehat{BF}$ in E' schnitte. Es wäre sodann nach Art. 49 $\widehat{CB} = \widehat{FE'}$, während gegeben ist $\widehat{CB} = \widehat{FE}$. Es müssen somit E' mit E und D' mit D zusammenfallen.

Aus allem dem schlieszt man

$$\widehat{GP} = \widehat{DF} = Uq''', \ \widehat{IQ} = \widehat{DE} = Uq'', \ \widehat{GH} = \widehat{IK}$$

Weil aber

$$\widehat{\mathrm{HP}} = \widehat{\mathrm{AC}} = Uq', \ \widehat{\mathrm{KQ}} = \widehat{\mathrm{AB}} = Uq$$

genommen sind, so lässt die Gleichung

$$\widehat{\mathrm{GH}} = \widehat{\mathrm{IK}}$$

sich wie nachstehend interpretiren:

$$\frac{Uq'''}{Uq'} = \frac{Uq''}{Uq} \text{ wenn } \frac{Uq}{Uq'} = \frac{Uq''}{Uq'''}$$

und weil aus (b. 172) nach den Eigenschaften der gewöhnlichen Proportionen folgt:

$$Tq''' : Tq' = Tq'' : Tq,$$

so schlieszt man

$$q''' : q' = q'' : q \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \; . \; . \; . \; . \; (b.\, 175)$$

oder in Worten: Bei einer Quaternionenproportion können die beiden äuszeren Quaternionen umgetauscht werden.

Vergleicht man die Relation (b. 175) mit (b. 174), statt dessen wir auch schreiben können:

$$q''' : q'' = q' : q$$

so erhält man den Satz:

In einer Quaternionenproportion können die beiden mittleren Quaternionen umgetauscht werden, oder in Zeichen

$$q : q'' = q' : q''' \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \; . \; . \; . \; . \; (b.\, 176)$$

Aus den beiden Sätzen (b. 175) (b. 176) kann man schlieszen, dass im allgemeinen das Produkt der äuszeren Gröszen demjenigen der mittleren nicht gleich kommt.

Denn weil die mittleren Gröszen umgetauscht werden können, so würde man, falls die genannte Eigenschaft gültig wäre, daraus schlieszen, dass auch bei der Quaternionenmultiplikation die Faktoren umgetauscht werden können, was mit dem Vorhergehenden streitig ist.

Aus einer gegebenen Proportion $q : q' = q'' : q'''$ kann man eine jede der Gröszen auflösen, und zwar geschieht dies wie nachstehend:

Aus $\frac{q}{q'} = \frac{q''}{q'''}$ folgt $\frac{q}{q'} q' = \frac{q''}{q'''} q'$ oder $q \frac{1}{q'} q' = \frac{q''}{q'''} q'$

oder schlieszlich

$$q = \frac{q''}{q'''} q' \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b.\,177)$$

Aus $q : q' = q'' : q'''$ folgt nach (b. 176):

$$\frac{q}{q''} = \frac{q'}{q'''}, \text{ oder } \frac{q}{q''} q''' = \frac{q'}{q'''} q''',$$

$$\text{oder } q' = \frac{q}{q''} q''' \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b.\,178)$$

In derselben Weise findet man

$$q'' = \frac{q}{q'} q''' \text{ und } q''' = \frac{q'}{q} q'' \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \quad . \quad (b.\,179)$$

Wir schlieszen diesen Artikel und die Betrachtungen über Proportionen mit der Bemerkung, dass die Proportion

$$q : q' = q'' : q'''$$

auch in andrer Gestalt erscheinen kann. So ist z. B. nach (b.24*)

$$\frac{1}{q} = \frac{Kq}{Nq}$$

und deshalb wird

$$\frac{qKq'}{Nq'} = \frac{q''Kq'''}{Nq'''}$$

oder auch

$$Nq'''.qKq' = Nq'.q''Kq'''$$

und

$$Nq''.qKq' = Nq.q'Kq''' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b.\,180)$$

weil

$$Nq : Nq' = Nq'' : Nq'''.$$

74. **Allgemeine Theorie der Potenzen und Wurzeln von Quaternionen.**

Wir definiren $(Uq)^n$, wo n eine willkürliche ganze oder gebrochene arithmetische Zahl ist, dadurch, dass wir dieses Symbol als einen Versor betrachten, dessen Achse mit $Ax.q$ übereinstimmt, während sein Winkel dem n-fachen des Drehungswinkels des Quaternions q gleich ist. In Zeichen ist dies

$$Ax.(Uq)^n = Ax.q\,, \quad \angle (Uq)^n = n \angle q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b.\,181)$$

Wenn jedoch n eine negative Zahl sein möchte, z. B. $= -m$, so sei unter $(Uq)^{-m}$ der Reciproke des Quaternions $(Uq)^m$ verstanden, oder

$$(Uq)^{-m} = \frac{1}{(Uq)^m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,182)$$

Nehmen wir weiter durch die Definition an

$$q^n = (Tq)^n\,(Uq)^n = Tq^n\,Uq^n \quad \ldots\ldots \quad (b.\,183)$$

eine Gleichung, die zugleich aussagt, dass die Klammern bei $(Tq)^n\,(Uq)^n$ im weiteren fortgelassen werden sollen, so erscheint hierdurch die n^{te} Potenz eines Quaternions als ein Quaternion, dessen Achse mit derjenigen von q übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist, je nachdem n eine positive oder eine negative Zahl ist, dessen Tensor der n^{ten} Potenz des ursprünglichen Tensors, und dessen Winkel dem n-fachen des ursprünglichen Drehungswinkels gleich ist.

Es erfolgt somit aus der Gleichung ($b.$ 183)

$$Ax.q^n = \pm Ax.q, \text{ je nachdem } n \gtrless 0,\ T.q^n = Tq^n,\ U.q^n = Uq^n \quad (b.\,184)$$

Die Gleichung ($b.$ 181) gestattet einen wichtigen Schlusz. Wenn wir nämlich die Relation ($b.$ 136) in Betracht ziehen, so erhalten wir

$$Uq = \cos \angle q + \sin \angle q . UVq \quad \ldots\ldots \quad (b.\,185)$$

Nach ($b.$ 181) ist jedoch, weil ein rechtes Radial in der Ebene des Quaternions q^n einem solchen in der Ebene von q gleich sein musz (der Übereinstimmung der Ebenen zufolge)

$$(Uq)^n = \cos(n \angle q) + \sin(n \angle q). UVq \quad \ldots \quad (b.\,186)$$

eine Formel, die nicht nur für positive Werte von n, sondern auch für negative Werte gültig ist. Denn wenn $n = -m$, so erhält man nach ($b.$ 182)

$$(Uq)^{-m} = \frac{1}{(Uq)^m} = \frac{1}{\cos(m \angle q) + \sin(m \angle q). UVq} =$$
$$= \cos(m \angle q) - \sin(m \angle q) . UVq.$$

indem man nach ($b.$ 73*) Zähler und Nenner durch

$$\cos(m \angle q) - \sin(m \angle q) . UVq$$

multiplicirt und die Formel ($b.$ 129) beachtet. Es wird deshalb

$$(Uq)^{-m} = \cos(-m \angle q) + \sin(-m \angle q) . UVq$$

oder auch bei negativem n

$$(Uq)^n = \cos(n \angle q) + \sin(n \angle q) . UVq.$$

Aus der Verbindung der Gleichungen ($b.$ 185) ($b.$ 186) resultirt nun für alle Werte von n:

$$(\cos \angle q + \sin \angle q . UVq)^n = \cos(n \angle q) + \sin(n \angle q). UVq \quad (b.\,187)$$

Das in der Algebra gültige Moivre'sche Theorem erscheint daher auch bei Quaternionen.

Es ist übrigens leicht, dasselbe für ganze Werthe von n durch Multiplikation nach den gegebenen Regeln nachzuweisen.

Hat man es mit einem rechten Quaternion r zu tun, so geht (*b*. 186) über in:

$$(Ur)^n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).UVr.$$

Es wird weiter im allgemeinen nach (*b*. 183) (*b*. 186)

$$\left.\begin{aligned} q^n &= Tq^n\,[\cos(n\angle q) + \sin(n\angle q).UVq] \\ r^n &= Tr^n\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).UVr\right] \end{aligned}\right\} \ldots (b.\ 188)$$

Und hierbei schlieszen sich die nachstehenden Formeln an:

1⁰. $$S.q^n = Tq^n\cos(n\angle q) \quad \ldots\ldots\ldots (b.\ 189)$$

2⁰. $$V.q^n = Tq^n\sin(n\angle q).UVq \quad \ldots\ldots (b.\ 190)$$

3⁰. $$S.r^n = Tr^n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (b.\ 191)$$

Es ist deshalb $S.r^n$ nur dann $=0$, wenn n eine ungerade Zahl ist.

4⁰. $$V.r^n = Tr^n\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)UVq \quad \ldots\ldots (b.\ 192)$$

Hiernach ist $V.r^n = 0$, wenn n eine gerade Zahl bedeutet.

5⁰. $$K.q^n = Tq^n[\cos(n\angle q) - \sin(n\angle q).UVq]\ .\ (b.\ 193)$$

6⁰. $$\frac{1}{q^n} = q^{-n} = (Tq)^{-n}[\cos(n\angle q) - \sin(n\angle q).UVq].\ (b.194)$$

7⁰. $$q^n\,K.q^n = Tq^{2n} = (qKq)^n \quad \ldots\ldots\ldots (b.\ 195)$$

75. Besonders wichtig ist das Symbol q^{-1}, weil es nach der Definition (*b*. 184) mit $\frac{1}{q}$ identisch ist. Es ist somit q^{-1} der Reciproke des Quaternions q. Man kann die Grösze q^{-1} auch bei dem Quotienten zweier Quaternionen einführen und erhält dann

$$\frac{q_1}{q} = q_1 q^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\ 196)$$

Die zweite Seite ist natürlich von $q^{-1}q_1$ verschieden, wie wir schon in Art. 52 bemerkten. Man erhält weiter

$$\frac{1}{q} = q^{-1} = Tq^{-1}\,[\cos\angle q - \sin\angle q.UVq]$$

76. Wir wollen noch einige allgemeine Sätze über Potenzen beweisen.

1⁰. $q^m q^n = q^{m+n}$. . . . . (b. 197)

Denn

$$q^m q^n = Tq^m Tq^n \,[\cos(m \angle q) + \sin(n \angle q).UVq]$$
$$[\cos(n \angle q) + \sin(n \angle q).UVq] =$$
$$= Tq^{m+n}\,[\cos(m+n) \angle q + \sin(m+n) \angle q\,.UVq],$$
weil $(UVq)^2 = -1$
$$= q^{m+n}$$

2⁰. $(q^n)^m = q^{nm}$ . . . . (b. 198)

Weil

$$(q^n)^m = (Tq^n)^m \,[\cos(n \angle q) + \sin(n \angle q)\,.UVq]^m =$$
$$= Tq^{nm}\,[\cos(mn \angle q) + \sin(mn \angle q)\,.UVq]$$ nach (b. 187)
$$= q^{nm}.$$

Eine Folgerung lässt sich hieraus ziehen:

Weil $q^{mn} = q^{nm}$, so ist auch $(q^n)^m = (q^m)^n$.

3⁰. $q^n q'^n \gtrless (qq')^n$.

Denn man erhält:

$$q^n q'^n = Tq^n Tq'^n \,[\cos(n \angle q) + \sin(n \angle q).UVq]$$
$$[\cos(n \angle q') + \sin(n \angle q').UVq']$$
$$= (Tq\,Tq')^n\,[\cos(n \angle q)\cos(n \angle q') + \sin(n \angle q)\cos(n \angle q').UVq +$$
$$+ \cos(n \angle q)\sin(n \angle q').UVq' + \sin(n \angle q)\sin(n \angle q').UVq\,UVq']$$

Fig. 50

UVq, UVq' sind beide rechte Radiale. Es sei in der Figur 50

$$UVq' = \frac{OA}{OC},\quad UVq = \frac{OB}{OA},$$

so ist

$$UVq.UVq' = \frac{OB}{OC}.$$

Diese Grösze ist somit ein Radial in einer zu den Ebenen der Quaternionen q, q' senkrechten Ebene.

Die erhaltene Formel lässt sich nicht weiter vereinfachen und kann nicht in der Gestalt

$$(Tq\,Tq')^n\,[\cos(n \angle qq') + \sin(n \angle qq').UVqq']$$

erhalten werden.

77. Die Grösze $q^{\frac{1}{n}}$, in den in Art. 74 definirten Sinn genommen, wollen wir die n^{te} Wurzel aus dem Quaternion q nennen und schreiben

$$q^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{q} = Tq^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\angle q}{n} + \sin\frac{\angle q}{n}.UVq\right). \quad . \quad (b.\,199)$$

Es folgt hieraus, dass die n^{te} Wurzel eines Quaternions ein neuer Quaternion ist, dessen n^{te} Potenz dem Quaternion q gleich kommt, denn nach (b. 197) ist

$$(q^{\frac{1}{n}})^n = q^{(\frac{1}{n}n)} = q.$$

Man kann hierdurch noch statt $q^{\frac{n}{m}}$ die Bezeichnung $\sqrt[m]{q^n}$ einführen, denn es ist:

$$q^{\frac{n}{m}} = (q^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{q^n}.$$

78. Konisch spaltende Quaternionen. In Art. 17—19 fanden wir, dass das Symbol $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ gedeutet werden kann als ein Vektorkegel, nämlich als die Gesammtheit der Seitenlinien des Kegels, dessen Scheitel mit dem Anfangspunkt des Vektors α zusammenfällt, während die Grundfläche ein Kreis ist, aus dem Endpunkte von α mit dem Radius $T\beta$ beschrieben in einer zu β senkrechten Ebene.

Wenn nun ein dritter Vektor γ gegeben ist, so wollen wir die Gesammtheit der Operationen, welche den Vektor γ in den Vektorkegel $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ überführen, einen konisch spaltenden Quaternion nennen und mit

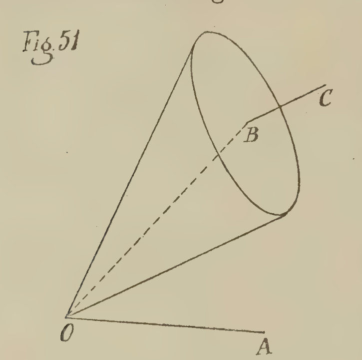
$$\frac{\alpha + \sqrt{-1}\,\beta}{\gamma}$$

bezeichnen. Dabei wollen wir aber unmittelbar eine weitere Definition aufstellen; wenn nämlich $\frac{\alpha}{\gamma} = q$, $\frac{\beta}{\gamma} = q'$ gesetzt wird, so wollen wir annehmen, dass identisch sei

$$\frac{\alpha + \sqrt{-1}\,\beta}{\gamma} = q + \sqrt{-1}\,q' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b.\,200)$$

Die Figur 51 veranschaulicht den Begriff des konisch spaltenden Quaternions. Von O aus ist der Vektor $OA = \gamma$ gezogen, weiter $AB = \alpha$, $BC = \beta$. Der Kreis B ist in der Ebene, durch B senkrecht zu β gebracht mit dem Radius $T\beta$ beschrieben und nachher der Strahlenkegel aus A nach dem Umfange dieses Kreises construirt.

Der Ausdruck $q + \sqrt{-1}\, q'$ spaltet somit den Strahl OA in diesen Strahlenkegel.



Es ist klar, dass die vorher gegebenen Definitionen in diesem Falle keinen Sinn haben und es erscheint deshalb angemessen, die wichtigsten Gröszen aufs Neue zu deuten.

79. Zwei konisch spaltende Quaternionen $q + \sqrt{-1}\, q'$ und $q_1 + \sqrt{-1}\, q_1'$ sollen einander gleich heiszen, wenn $q = q_1$ und $q' = q_1'$.

Die Summe, die Differenz und das Produkt zweier konisch spaltenden Quaternionen wollen wir dadurch definiren, dass diese Gröszen bestimmt werden sollen, indem man $\sqrt{-1}$ als einen gewöhnlichen skalaren Faktor betrachtet; somit schreiben wir:

$$(q + \sqrt{-1}\, q') \pm (q_1 + \sqrt{-1}\, q_1') = q \pm q_1 + \sqrt{-1}\, (q' \pm q_1') \quad (b.\, 201)$$

$$(q + \sqrt{-1}\, q')\, (q_1 + \sqrt{-1}\, q_1') = qq_1 - q'q_1' + \sqrt{-1}\, (q'q_1 + qq_1') \quad (b.\, 202)$$

Wenn man bei einem Produkte, welches drei oder mehrere Faktoren enthält, die Multiplikation wirklich ausführt, so zeigt sich, dass auch bei der Multiplikation konisch spaltender Quaternionen das associative Princip gültig bleibt.

Der Reciproke eines konisch spaltenden Quaternions

$$\frac{1}{q + \sqrt{-1}\, q'}$$

sei ein solcher, welcher *mit* dem Nenner $q + \sqrt{-1}\, q'$, oder auch *durch* denselben, multiplicirt die Einheit ergibt.

Setzen wir nämlich

$$\frac{1}{q + \sqrt{-1}\, q'} = q_1 + \sqrt{-1}\, q_1',$$

so lässt sich hieraus schlieszen

$$(q + \sqrt{-1}\, q')\, (q_1 + \sqrt{-1}\, q_1') = 1$$

oder

$$(q_1 + \sqrt{-1}\, q_1')\, (q + \sqrt{-1}\, q') = 1. \;.\;.\;.\;. \quad (b.\, 203)$$

Aus der ersten dieser Gleichungen kann gefolgert werden

$$qq_1 - q'q_1' = 1 \quad \text{und} \quad qq_1' + q'q_1 = 0$$

und die zweite Relation dieses Systems ergibt

$$q_1' = -q^{-1}q'q_1,$$

wodurch nach Einführung dieses Wertes in die erste

$$(q + q'q^{-1}q')q_1 = 1$$

erhalten wird; somit ist

$$q_1 = \frac{1}{q + q'q^{-1}q'} = \frac{(q')^{-1}}{q(q')^{-1} + q'q^{-1}}$$

und

$$q_1' = -\frac{q^{-1}}{q(q')^{-1} + q'q^{-1}}.$$

Dasselbe Resultat hätte man aber auch aus der zweiten der Gleichungen (b. 203) erhalten.

Die Gleichung (b. 53) oder

$$\frac{1}{(q + \sqrt{-1}q')(q_1 + \sqrt{-1}q_1')} = \frac{1}{(q_1 + \sqrt{-1}\,q_1')} \frac{1}{(q + \sqrt{-1}\,q')}. \quad (b.\,204)$$

bleibt nun auch bei konisch spaltenden Quaternionen gültig. Denn die zweite Seite dieser Gleichung ergibt *mit* dem Nenner der ersten Seite (oder *durch* denselben) multiplicirt die Einheit.

Nunmehr ist es ein Leichtes den Quotienten zweier konisch spaltenden Quaternionen zu deuten. Wir setzen nämlich fest, dass

$$\frac{q + \sqrt{-1}\,q'}{q_1 + \sqrt{-1}\,q_1'} = (q + \sqrt{-1}\,q') \frac{1}{q_1 + \sqrt{-1}\,q_1'}. \quad (b.\,205)$$

Daraus ergibt sich dann wieder weiter, dass man Zähler und Nenner des so erhaltenen Bruches *durch* denselben konisch spaltenden Quaternion multipliciren kann.

Nach der Gleichung (b. 205) ist noch

$$\frac{q' + \sqrt{-1}\,q''}{q} = (q' + \sqrt{-1}\,q'')\frac{1}{q} = q'\frac{1}{q} + \sqrt{-1}\,q''\frac{1}{q} \text{ nach}(b.202)$$

$$= \frac{q'}{q} + \sqrt{-1}\frac{q''}{q}$$

und hierdurch kann für den reciproken des Ausdrucks $q + \sqrt{-1}\,q'$ eine neue Form angegeben werden. Mit Hülfe der Relationen (b. 203) fanden wir nämlich

$$\frac{1}{q+\sqrt{-1}\,q'} = \frac{(q')^{-1}}{q\,(q')^{-1}+q'\,q^{-1}} + \sqrt{-1}\cdot\frac{-\,q^{-1}}{q\,(q')^{-1}+q'\,q^{-1}}$$

und dieses Resultat lässt sich nun auch darstellen durch

$$\frac{1}{q+\sqrt{-1}\,q'} = \frac{(q')^{-1}-\sqrt{-1}\,q^{-1}}{q\,(q')^{-1}+q'\,q^{-1}} \quad \ldots\ldots (b.\,206)$$

Bemerkenswert ist noch, dass die Gleichung

$$\frac{1}{q+\sqrt{-1}\,q'} = \frac{q-\sqrt{-1}\,q'}{(q+\sqrt{-1}\,q')\,(q-\sqrt{-1}\,q')}$$

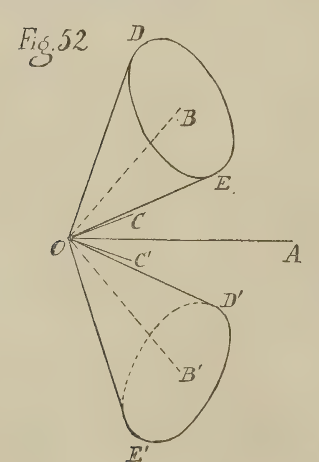
in der Quaternionenrechnung nicht dazu dienen kann aus dem Nenner das Symbol $\sqrt{-1}$ fortzuschaffen.

Aus der Gleichung (b. 206) entnehmen wir, dass dieser Zweck hingegen unmittelbar durch die Multiplikation von Zähler und Nenner des Ausdrucks $1:(q+\sqrt{-1}\,q')$ *durch* $(q')^{-1}-\sqrt{-1}\,q^{-1}$ erreicht wird. Dieses Verfahren kann natürlich nun auch bei dem Quotienten zweier willkürlichen konisch spaltenden Quaternionen angewandt werden, z. B.

$$\frac{q+\sqrt{-1}\,q'}{q_1+\sqrt{-1}\,q_1'} = \frac{(q+\sqrt{-1}\,q)\,[(q_1')^{-1}-\sqrt{-1}\,q_1^{-1}]}{q_1\,(q_1')^{-1}+q_1'\,q_1^{-1}}$$

$$= \frac{q\,(q_1')^{-1}+q'\,q_1^{-1}+\sqrt{-1}\,\{q'\,(q_1')^{-1}-q\,q_1^{-1}\}}{q_1\,(q_1')^{-1}+q_1'\,q_1^{-1}}$$

und hiermit ist der Quotient wieder in die Form eines konisch spaltenden Quaternions geraten.



Weiter definiren wir den Conjugirten eines konisch spaltenden Quaternions $q+\sqrt{-1}\,q'$ als die Grösze $Kq+\sqrt{-1}\,Kq'$; es ist hierdurch identisch

$$K(q+\sqrt{-1}\,q') = Kq+\sqrt{-1}\,Kq' \quad (b.207)$$

Es ist ein Leichtes eine geometrische Vorstellung des conjugirten Quaternions zu gewinnen. In der Figur 52 sei nämlich

$$\text{OB}:\text{OA}=q,\quad \text{OC}:\text{OA}=q',$$
$$\text{OB}':\text{OA}=Kq,\quad \text{OC}':\text{OA}=Kq'.$$

Bringt man durch B, B′ Ebenen senkrecht zu OC, OC′ bzhw. und beschreibt man in denselben um B, B′

Kreise, deren Radius $T.OC$ gleich kommt, so spaltet $q+\sqrt{-1}\,q'$ den Vektor OA in den Strahlenkegel OBDE, $K(q+\sqrt{-1}\,q')$ dagegen in den Strahlenkegel OB'D'E'.

Es bleibt nun der wichtige Satz in (b. 54) ausgesprochen auch bei konisch spaltenden Quaternionen bestehen. Denn es ist

$$K.(q+\sqrt{-1}q')(q_1+\sqrt{-1}q_1')=K.\{qq_1-q'q_1'+\sqrt{-1}(q'q_1+qq_1')\}$$

nach (b. 202)

$$=K(qq_1-q'q_1')+\sqrt{-1}\,K(q'q_1+qq_1')$$

nach (b. 207)

$$=Kq_1\,Kq-Kq_1'Kq'+\sqrt{-1}\,Kq_1Kq'+$$
$$+\sqrt{-1}\,Kq_1'Kq \text{ nach } (b.\,44)\ (b.\,54)$$
$$=(Kq_1+\sqrt{-1}\,Kq_1')\,(Kq+\sqrt{-1}\,Kq')$$
$$=K(q_1+\sqrt{-1}\,q_1')\,K(q+\sqrt{-1}\,q')$$

nach (b. 207)

Den Skalar und den Vektorteil eines konisch spaltenden Quaternions zu definiren, wählen wir die Gleichungen (b. 107) (b. 131)

$$S=\tfrac{1}{2}(1+K),\quad V=\tfrac{1}{2}(1-K).$$

Es wird deshalb

$$S(q+\sqrt{-1}\,q')=\tfrac{1}{2}[(q+\sqrt{-1}\,q')+(Kq+\sqrt{-1}\,Kq')] \text{ nach } (b.\,207)$$
$$=\tfrac{1}{2}[q+Kq+\sqrt{-1}\,(q'+Kq')] \text{ nach } (b.\,201)$$

oder

$$S\,(q+\sqrt{-1}\,q')=Sq+\sqrt{-1}\,Sq' \;\ldots\ldots\; (b.\,208)$$

und ebenso

$$V(q+\sqrt{-1}\,q')=Vq+\sqrt{-1}\,Vq' \;\ldots\ldots\; (b.\,209)$$

Hieraus ersieht man, dass der Grösze $\sqrt{-1}$ Skalarcharakter zukommt.

Lassen wir weiter, indem wir unter q einen konisch spaltenden Quaternion verstehen, auch die Relation (b. 51)

$$qKq=Tq^2=Nq$$

gelten, so ist dadurch der Tensor und der Norm eines solchen Quaternions definirt. Es wird

$$N(q+\sqrt{-1}q')=\{T(q+\sqrt{-1}q')\}^2=(q+\sqrt{-1}q')\,(Kq+\sqrt{-1}\,Kq')=$$
$$=qKq-q'Kq'+\sqrt{-1}(qKq'+q'Kq)$$
$$=Nq-Nq'+2\sqrt{-1}\,S(qKq')$$

weil

$S.qKq' = S.K(qKq')$ nach (b. 101) $= S.q'Kq$ nach (b. 54).

$V.qKq' = V.K(qKq')$ nach (b. 120) $= - V.q'Kq$ nach (b. 54)

Die erhaltene Formel

$$N(q + \sqrt{-1}\, q') = Nq - Nq' + 2\sqrt{-1}\, S(qKq') \; . \; . \quad (b.\ 210)$$

ist dieselbe wie (b. 115), wenn man darin q' durch $\sqrt{-1}\, q'$ ersetzt und $\sqrt{-1}$ als einen gewöhnlichen algebraischen Faktor betrachtet.

Die Formel für den Tensor des Produktes zweier Quaternionen bleibt auch bei konisch spaltenden Quaternionen bestehen. Es wird nämlich

$N(q + \sqrt{-1} q')(q_1 + \sqrt{-1} q_1') =$

$= (q + \sqrt{-1} q')(q_1 + \sqrt{-1} q_1') K.(q + \sqrt{-1} q')(q_1 + \sqrt{-1} q_1')$ nach (b.51)

$= (q + \sqrt{-1} q')(q_1 + \sqrt{-1} q_1') K(q_1 + \sqrt{-1} q_1') K(q + \sqrt{-1} q')$ nach(b.54)

$= (q + \sqrt{-1}\, q')\, N(q_1 + \sqrt{-1} q_1') K(q + \sqrt{-1}\, q')$ nach (b. 51)

$= N(q + \sqrt{-1}\, q')\, N(q_1 + \sqrt{-1}\, q_1')$

Nunmehr wird es auch leicht sein den Versor eines Quaternions der betrachteten Art zu interpretiren. Wir setzen nämlich

$$U(q + \sqrt{-1}\, q) = \frac{q + \sqrt{-1}\, q'}{T(q + \sqrt{-1}\, q')} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b.\ 211)$$

Und es lässt dieser Ausdruck sich leicht in einen solchen mit reellem Nenner transformiren. Denn nach dem Vorhergehenden erhält man

$$U(q + \sqrt{-1}\, q') = \frac{(q + \sqrt{-1}\, q')\, T[(q')^{-1} - \sqrt{-1}\, q^{-1}]}{T.(q + \sqrt{-1}\, q')\, [(q')^{-1} - \sqrt{-1}\, q^{-1}]}$$

$$= \frac{(q + \sqrt{-1})\, T[(q')^{-1} - \sqrt{-1}\, q^{-1}]}{T[q(q')^{-1} + q' q^{-1}]}$$

Es sind durch diese Definitionen die Grundformeln aufrecht erhalten und es gelingt leicht nachzuweisen, dass jede einzelne Formel, welche die hier definirten Gröszen enthält und in diesem Abschnitte für gewöhnliche Quaternionen bewiesen ist, auch gültig bleibt, wenn man darin dieselben durch konisch spaltende Quaternionen ersetzt und auszerdem $\sqrt{-1}$ als einen gewöhlichen algebraischen Faktor betrachtet.

Ist es, der Deutung wegen, angemessen die Namen »Vektorkegel" und »konisch spaltender Quaternion" zu wählen, der

Algebra gemäsz werden wir doch häufig α einen reellen, $\sqrt{-1}\,\beta$ einen imaginären, $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ einen complexen Vektor nennen mit analogen Bezeichnungen bei den Quaternionen.

Schlieszlich sei erwähnt, dass HAMILTON für die Symbole

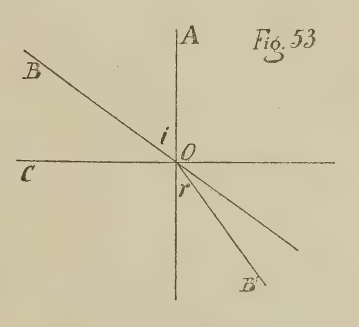
$$\alpha + \sqrt{-1}\,\beta,\; q + \sqrt{-1}\,q'$$

die Namen Bivektor, Biquaternion vorgeschlagen hat.

80. Quaternionen kommen in der Natur häufig vor; wir brauchen z. B. nur an die Lichterscheinungen zu erinnern. Wenn eine Lichtbewegung mit bestimmter Richtung und Geschwindigkeit sich ausbreitet, so kann man einen Vektor α construirt denken derart, dass $U\alpha$ in die Richtung der Fortpflanzung fällt und $T\alpha$ der Geschwindigkeit der Fortpflanzung gleich kommt.

Stöszt diese Bewegung an ein andres Mittel, so werden Fortpflanzungsrichtung und Geschwindigkeit geändert und es kann ein zweiter Vektor β construirt werden, welcher für das zweite Mittel dieselbe Bedeutung hat wie α für das erste.

Die Wirkung des zweiten Mittels ist somit die Überführung des Vektors α in β und man kann daher sagen, das zweite Mittel habe wie ein Quaternion operirt.



Es sei i der Einfallswinkel, r die Neigung des Strahles gegen das Lot beim Austritt, der einfallende Strahl BO sei α, v und v' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden Mitteln, ε ein rechter Versor in der Einfallsebene, dessen Drehung von AO nach OC erfolgt, so ist zu setzen

$$\beta = \frac{v'}{v}\,[\cos(i-r) - \sin(i-r).\varepsilon]\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \quad (b.\ 212)$$

wozu noch kommt

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}.$$

Der Quaternion $\beta : \alpha$ erscheint hier als Funktion des Skalars i.

Wie Hamilton dargetan hat, liegt bei doppelbrechenden Krystallen die Möglichkeit vor, dass unter gewissen Umständen ein einziger auffallender Strahl in einen Strahlenkegel zweiten Grades gespalten wird. Es ist dies die Erscheinung der konischen Refraction. Man kann somit sagen, ein doppelbrechender Krystall könne wie ein konisch spaltender Quaternion wirken.

PRODUKTE VON VEKTOREN.

81. In Art. 57 haben wir gezeigt, dass die Summe und die Differenz zweier rechten Quaternionen durch die Summe und die Differenz der Indices derselben bestimmt wird und dass das Quotient zweier rechten Quaternionen dem Quotiente der Indices gleich ist.

Das Produkt zweier Vektoren ist bisher nicht definirt worden. HAMILTON hat diesen Umstand benutzt, ein solches Produkt zu deuten als das Produkt der rechten Quaternionen, deren Indices jenen Vektoren gleich kommen.

Es ist dies ein sehr wichtiger Schritt für die Lehre der hier betrachteten Operatoren gewesen. Denn es wird dadurch ermöglicht, bei allen vorkommenden Operationen (Addition, Subtraction, Multiplikation, Division, Potenzirung) die Vektoren durch rechte Quaternionen und umgekehrt zu ersetzen.

Demgemäsz werden wir im Folgenden mehrmals die Benennung Vektor benutzen, wo der Vektorteil eines Quaternions, ein rechter Quotient, damit gemeint ist.

In gleicher Weise wird man häufig die Symbole i, j, k, welche wir im vorigen Abschnitte ausführlich behandelten, nicht als ein System rechter Radiale, sondern als ein System unter sich rechtwinkliger Einheitsvektoren bezeichnet finden.

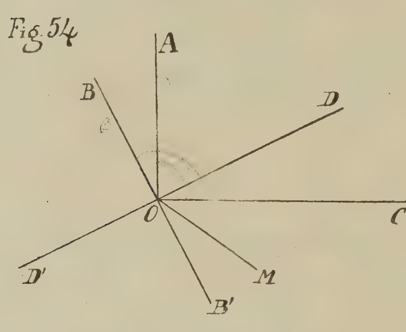
Es wird damit gemeint, dass dieselben als die Indices der drei rechten Radiale betrachtet werden.

Der Kürze halber wollen wir noch eine neue Schreibweise einführen; den rechten Quotienten r, dessen Index α ist, wollen wir mit $I^{-1}\alpha$ bezeichnen.

Durch die von HAMILTON aufgestellte Definition ist sodann

$$\alpha\beta\gamma \ldots \ldots = I^{-1}\alpha \,.\, I^{-1}\beta \,.\, I^{-1}\gamma \ldots \ldots \ldots \quad (c.\ 1)$$

82. Beschäftigen wir uns zunächst nur mit dem zwei Faktoren enthaltenden Produkte $\alpha\beta$.



Es sei in der Fig. 54

$$OA = \alpha, \quad OB = \beta.$$

Wir denken zwei Ebenen angebracht senkrecht zu OA, OB bzhw. Dieselben mögen sich längs OM schneiden, so ist OM $\perp$ OA und $\perp$ OB. In diesen Ebenen seien OC, OD senkrecht zu OM gezogen, so liegen die Geraden OA, OB, OC, OD sämtlich in einer zu OM senkrechten Ebene, und

$$\angle AOB = \angle COD$$

$T.$OM sei willkürlich. Es können dann stets $T.$OC, $T.$OD derart bestimmt werden, dass

$$T.OC : T.OM = T.OA, \quad T.OD : T.OM = T.OB \quad \ldots \quad (c.\ 2)$$

Es sei nun

$$I^{-1}\alpha = \frac{OC}{OM}, \quad I^{-1}\beta = \frac{OD}{OM}.$$

Das Produkt $\alpha\beta$ zu bestimmen, müssen wir noch $I^{-1}\beta$ auf den Zähler OM reduciren. Dazu soll DO verlängert werden zu OD′, und

$$T.OD : T.OM = T.OM : T.OD' \ldots \ldots \ldots \quad (c.\ 3)$$

angenommen werden. Es wird dadurch $I^{-1}\beta = OM : OD'$ und

$$\alpha\beta = I^{-1}\alpha . I^{-1}\beta = \frac{OC}{OM}\,\frac{OM}{OD'} = \frac{OC}{OD'}.$$

Wenn man nun den Vektor BO verlängert nach B′, so ist

$$\angle AOB' = \pi - \angle AOB = \pi - \angle COD = \angle COD';$$

und bestimmt man noch $T.$OB′ derart, dass

$$T.OA : T.OB' = T.OC : T.OD'$$

so kann man statt des Quaternions OC : OD′ auch OA : OB′ nehmen und erhält dadurch

$$\alpha\beta = OA : OB' = \alpha : OB'.$$

Den in dieser Weise erhaltenen Vektor OB′ nennt HAMILTON den **Revektor** des Vektors β und man bezeichnet denselben mit $R\beta$. Es wird somit

$$\alpha\beta = \alpha : R\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 4)$$

Diese Gleichung spricht die Definition eines Produktes zweier Vektoren bei HAMILTON aus. Der englische Mathematiker zeigt dann weiter, dass $\alpha\beta$ dadurch auch als das Produkt zweier rechten Quotienten, deren Indices α, β sind, gedeutet werden kann, und erst bei Produkten, welche drei und mehr Faktoren enthalten, wird die am Anfang des vorigen Artikels gegebene Definition aufgestellt. Wir haben vorgezogen dieselbe voran zu setzen.

Betrachten wir den Revektor von β etwas näher.

Wie unmittelbar aus dem Vorhergehenden ersichtlich, ist

$$UR\beta = -U\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 5)$$

und weiter ist

$$TR\beta = T.\mathrm{OB}' = \frac{(T.\mathrm{OA})\,(T.\mathrm{OD}')}{T.\mathrm{OC}} = \frac{(T.\mathrm{OA})\,(T.\mathrm{OD}')}{(T.\mathrm{OA})\,(T.\mathrm{OM})} \text{ nach } (c.\ 2) =$$

$$= \frac{T.\mathrm{OM}}{T.\mathrm{OD}} \text{ nach } (c.\ 3) = \frac{1}{T\beta} \text{ nach } (c.\ 2)$$

oder kurz

$$TR\beta = \frac{1}{T\beta}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 6)$$

Durch Verbindung dieser Resultate wird deshalb

$$R\beta = -\frac{U\beta}{T\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 7)$$

Aus (c. 7) erhält man leicht

$$RR\beta = -\frac{UR\beta}{TR\beta} = \frac{U\beta}{\frac{1}{T\beta}} \text{ nach } (c.\ 5)\,(c.\ 6) = T\beta\,U\beta = \beta. \quad (c.\ 8)$$

oder in Worten: der Revektor eines Revektors ist der ursprüngliche Vektor.

Mit Hülfe der Figur 55 lässt sich weiter der Satz beweisen:

Die Verbindungsgerade der Endpunkte der Revektoren zweier Vektoren $\alpha = \mathrm{OA}$, $\beta = \mathrm{OB}$ ist parallel der Tangente, welche in O an den um $\triangle$ OAB beschriebenen Kreis geht.

Es sei

$$OA' = R\alpha, \ OB' = R\beta,$$

so ist

$$T.OA' : T.OB' = \frac{1}{T.OA} : \frac{1}{T.OB}.$$

Demnach ist

$$\triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$$

und dadurch

$$\angle OB'A' = \angle OBA.$$

Wenn OC die Tangente in C ist, so wird

$$\angle B'OC = \angle C'OB = \\ = \angle OAB$$

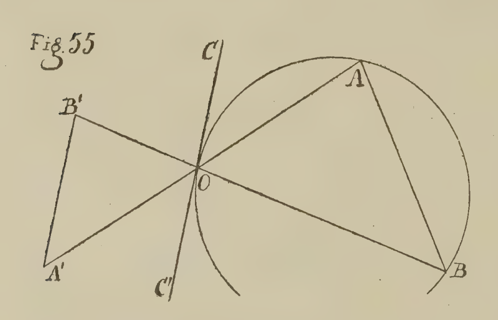
und deshalb

$$\angle OB'A' = \angle B'OC,$$

oder

$$A'B' \,//\, OC,$$

wie zu beweisen war.



83. Das Symbol α^n, oder die Potenz eines Vektors, wird in derselben Weise gedeutet wie das Produkt. Man erhält demnach, wenn man die Gleichung (b. 188) berücksichtigt

$$\alpha^n = (I^{-1}\,\alpha)^n = (T\alpha)^n \left[cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right).\, U\alpha \right] \quad . \; . \; (c.\,9)$$

wo $U\alpha$ einen rechten Radial in einer Ebene senkrecht zu α bedeutet.

Für einen rechten Radial ε erhalten wir somit die merkwürdige Formel

$$\varepsilon^n = cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right).\,\varepsilon.$$

Nehmen wir speciell $n = -1$, so wird

$$\alpha^{-1} = -\,\frac{U\alpha}{T\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c.\,10)$$

und ein Blick auf die Gleichung (c. 7) zeigt unmittelbar die Identität der Symbole $I.\alpha^{-1}$ und $R\alpha$. Nach Art. 73 ist α^{-1} identisch mit $\frac{1}{\alpha}$, und daher wird

$$R\alpha = I.\alpha^{-1} = I.\frac{1}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c.\ 11)$$

Mit dieser Bezeichnung geht nun die Gleichung (c. 4) über in

$$\alpha\beta = \alpha : I.\beta^{-1} \text{ oder } = \frac{\alpha}{I.\beta^{-1}}.$$

Indessen wird gewöhnlich geschrieben:

$$\alpha\beta = \alpha : \beta^{-1} \text{ oder } = \frac{\alpha}{\beta^{-1}},$$

indem in der zweiten Seite dieser Gleichung unter α ein rechter Quotient verstanden ist.

84. Eine merkwürdige hierbei anschlieszende Transformation ist auch die nachstehende bei der in Art. 52 angegebenen Bedeutung der Gröszen j, k, während s Skalar ist:

$$k j^{-s} = j^s k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c.\ 11^*)$$

Denn nach dem Vorhergehenden ist

$$k j^{-s} = k\left[\cos\left(s\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(s\frac{\pi}{2}\right).j\right] = k\cos\left(s\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(s\frac{\pi}{2}\right).kj$$

$$= k\cos\left(s\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(s\frac{\pi}{2}\right).jk = \left[\cos\left(s\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(s\frac{\pi}{2}\right).j\right]k$$

$$= j^s k.$$

Es lässt sich hieraus noch folgern, dass

$$k = j^s k j^s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c.\ 11^{**})$$

für jeden willkürlichen Skalarwert von s.

85. Wenn q ein willkürlicher Quaternion ist, so kann derselbe stets auf die Form α^t gebracht werden, wo α ein rechter Quotient und t ein positiver Skalar ist. Denn wenn die Gleichung

$$q = \alpha^t$$

stattfinden soll, so ist nothwendig, dass

$$Ax.q = Ax.\alpha^t,\ \angle q = \angle \alpha^t = t\frac{\pi}{2},\ Tq = T\alpha^t.$$

Die erste dieser Gleichungen erfordert nur, weil t immer positiv ist, dass der Vektor α mit $Ax.q$ der Richtung nach zusammenfällt. Nach der zweiten Gleichung ist

$$t = \frac{2\angle q}{\pi}$$

und nach der dritten schliesslich

$$T\alpha = (Tq)^{\frac{1}{t}} = Tq^{\frac{1}{t}}.$$

Es erhellt hieraus, dass α und t eindeutig bestimmt werden, und dass der Wert von t stets zwischen 0 und 2 enthalten sein wird.

Für $t = 0$ ist $\angle q = 0$, somit ist q ein positiver Skalar; in diesem Falle verliert die Transformation $q = \alpha^t$ seine Bedeutung. Für $t = 2$ ist $\angle q = \pi$, somit ist q ein negativer Skalar und die Ebene des rechten Quotienten ist wie im vorigen Falle unbestimmt.

86. Die wichtigsten Formeln der Vektorenmultiplikation lassen sich unmittelbar den Artikeln 53 und flg. entnehmen. Es seien dieselben in der neuen Bezeichnung kurz wiederholt. Nach (b. 74) wird, wenn α in dem Sinne eines rechten Quotienten genommen wird

$$K\alpha = -\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c. 12)$$

Nach (b. 75) ist $$\alpha\beta = K.\beta\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c. 13)$$

Nach (b. 146) ist $$S.\alpha\beta = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c. 14)$$

Nach (b. 147) ist $$V.\alpha\beta = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta - \beta\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c. 15)$$

Nach (b. 148) ist $$\left\{\begin{array}{l} S.\alpha\beta = S.\beta\alpha \\ V.\alpha\beta = -V(\alpha\beta) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c. 16)$$

Nach (b. 47) ist $$\left\{\begin{array}{l} T.\alpha\beta = T\alpha T\beta \\ U.\alpha\beta = U\alpha U\beta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c. 17)$$

Nach (b. 91) ist $$(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c. 18)$$

Nach (b. 92) ist $$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c. 19)$$

Nach (b. 93) ist $$(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)(\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots) = \Sigma\, \alpha\alpha' \quad (c. 20)$$

wobei das Zeichen Σ bedeutet, das jede der Gröszen α, β, $\gamma \ldots$ durch jede der Gröszen α', β', $\gamma' \ldots$ multiplicirt werden soll; die erhaltenen Produkte addire man.

Wir wollen nunmehr die bei dem Produkte $\alpha\beta$ vorkommenden Gröszen mit denen bei $\frac{\alpha}{\beta}$ vergleichen. Aus (c. 4) oder

$$\alpha\beta = \mathrm{OA} : \mathrm{OB}'$$

und

$$\alpha : \beta = \mathrm{OA} : \mathrm{OB}$$

folgt unmittelbar

$$Ax.\, \alpha\beta = - Ax.\frac{\alpha}{\beta}, \quad \angle\, \alpha\beta = \pi - \angle \frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots \quad (c. 21)$$

$$U.\alpha\beta = \frac{U.\mathrm{OA}}{U.\mathrm{OB}'} = -\frac{U.\mathrm{OA}}{U.\mathrm{OB}} = -U\frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots . \quad (c.\ 22)$$

Deshalb wird

$$\alpha\beta = T\alpha\beta . U\alpha\beta = -T\alpha\beta U\frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 23)$$

$$S\alpha\beta = T\alpha\beta .\ \cos\angle\,\alpha\beta = -T\alpha\ T\beta\ \cos\angle\frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots . \quad (c.\ 24)$$

und weiter

$$S\alpha\beta = -N\beta\frac{T\alpha}{T\beta}\cos\angle\frac{\alpha}{\beta} = -N\beta\, S\frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots . \quad (c.\ 25)$$

$$V\alpha\beta = V.(T\alpha\ T\beta\ U.\alpha\beta) = T\alpha\ T\beta\ VU\alpha\beta =$$

$$= -T\alpha\ T\beta\, VU\frac{\alpha}{\beta}\ \text{nach}\ (c.\ 22) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots . \quad (c.\ 26)$$

und weiter

$$V\alpha\beta = -N\beta\, T\frac{\alpha}{\beta}\, VU\frac{\alpha}{\beta} = -N\beta\, V\frac{\alpha}{\beta} . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 27)$$

Aus ($c.$ 24) lässt sich noch schlieszen:

Wenn $\alpha \perp \beta$, so ist $S.\alpha\beta = 0$ . . . . . . ($c.$ 28)

und es ist in diesem Falle weiter

$$\alpha\beta = V\alpha\beta = -V\beta\alpha = -\beta\alpha\ \text{nach}\ (c.\ 16)$$

Umgekehrt

wenn $S.\alpha\beta = 0$, so musz auch $\alpha \perp \beta$. . . . ($c.$ 29)

denn es ist sodann nach ($c.$ 24)

$$\angle\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Aus ($c.$ 27) kann in gleicher Weise geschlossen werden:

Wenn $\alpha /\!/ \beta$, so ist $V\alpha\beta = 0$ . . . . . . ($c.$ 30)

Denn es ist in diesem Falle $\frac{\alpha}{\beta} =$ Skalar und $V\frac{\alpha}{\beta} = 0$.

Es wird sodann weiter

$$\alpha\beta = S\alpha\beta = S\beta\alpha = \beta\alpha .$$

Umgekehrt

wenn $V\alpha\beta = 0$, so ist $\alpha /\!/ \beta$, ... ($c.$ 31)

Denn nach ($c.$ 27) ist sodann auch $V\frac{\alpha}{\beta} = 0$, d. h. $\frac{\alpha}{\beta}$ ist

skalar, oder α und β müssen der Richtung nach zusammenfallen.

Aus (c. 25) und (c. 27) erfolgt durch Addition:

$$\alpha\beta = -N\beta.\left(S\frac{\alpha}{\beta} + V\frac{\alpha}{\beta}\right) = -N\beta.\frac{\alpha}{\beta} \quad . . . . (c. 32)$$

und dieselbe Gleichung hätte auf einen anderen Weg erhalten werden können, wie weiter erhellt. Aus (c. 26) geht hervor, indem man beachtet, dass der Tensor nicht negativ sein kann,

$$TV\alpha\beta = T\alpha\, T\beta\; TVU\frac{\alpha}{\beta} = T\alpha\, T\beta \sin \angle \frac{\alpha}{\beta} \text{ nach } (b. 128)$$

oder

$$TV\alpha\beta = 2 \text{ Inhalt des Dreiecks OAB} \quad . . . . (c. 33)$$

wenn man das Zeichen dieses Flächeninhaltes nicht beachtet.

Zum Schlusze dieses Artikels betrachten wir noch das wichtige Symbol α^2.

Nach (b. 130) ist

$$\alpha^2 = -N\alpha = -(T\alpha)^2 \quad . . . . (c. 34)$$

Die Anwendung dieser Formel gestattet in vielen Fällen Vereinfachung. Mit Hülfe derselben hätte z. B. auch die Relation (c. 32) sehr einfach erhalten werden können. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \alpha\beta^{-1}\beta^2 \text{ nach } (b. 197) \\ &= \beta^2\alpha\beta^{-1}, \text{ weil } \beta^2 \text{ skalar ist,} \\ &= -N\beta.\alpha\beta^{-1} \text{ nach } (c. 34) = -N\beta.\frac{\alpha}{\beta} \text{ nach } (b. 196). \end{aligned}$$

87. Wir gehen weiter zu denjenigen Vektorenprodukten über, welche drei Faktoren enthalten, wie $\alpha\beta\gamma$.

Aus der Gültigkeit des associativen Princips bei der Multiplikation willkürlicher Quaternionen schlieszt man, dass auch hier

$$\alpha\beta\gamma = \alpha.\beta\gamma = \alpha\beta.\gamma \quad . . . . (c. 35)$$

Wir erhalten zwei sehr wichtige Formeln, indem wir $S.\alpha\beta\gamma$ und $V.\alpha\beta\gamma$ näher in Betracht ziehen. Es steht hierbei dann $S.\alpha\beta\gamma$ statt $S(\alpha\beta\gamma)$, und wir wollen im Folgenden mehrmals diese Abkürzung benutzen, wie wir auch schon gelegentlich wohl taten. Es ist

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma) = S.\alpha S\beta\gamma + S.\alpha V\beta\gamma \text{ nach } (b. 109).$$

Weil α ein rechter Quotient ist, so wird dasselbe von $\alpha S\beta\gamma$

gelten. Deshalb musz das erste Glied des erhaltenen Resultats verschwinden. Es wird demnach

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha V\beta\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c.\ 35^*)$$

und die zweite Seite dieser Gleichung kann nach (c. 24) umgestaltet werden. Dadurch wird

$$S.\alpha\beta\gamma = -T\alpha . TV\beta\gamma \cos \angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha} = T\alpha . TV\beta\gamma . \cos\left(\pi - \angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha}\right)$$

In Art. 79 fanden wir, dass $\beta\gamma$ ein Quaternion in der Ebene der Vektoren β, γ ist; es ist demnach $V\beta\gamma$ ein rechter Quotient in dieser Ebene, und $\angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha}$ wird der Winkel sein zwischen α und der senkrechten zur Ebene BOC (OA $= \alpha$, OB $= \beta$, OC $= \gamma$ vorausgesetzt).

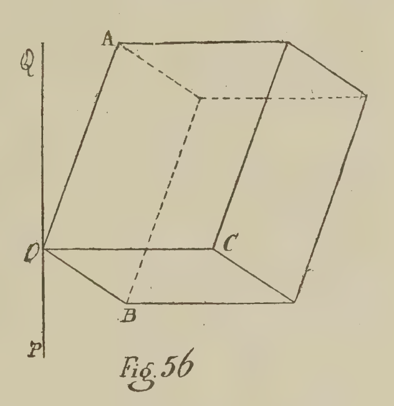


Fig. 56

Weil weiter

$$Ax.V\beta\gamma = Ax.\beta\gamma \text{ nach } (b.\ 117) = -Ax.\frac{\beta}{\gamma} \text{ nach } (c.\ 21) =$$

$$= Ax.\frac{\gamma}{\beta} \text{ nach } (b.\ 8)$$

so wird in der Figur 56

$$\text{OP} = Ax.V\beta\gamma$$

sein und deshalb ist

$$\pi - \angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha} = \pi - \angle \text{AOP} = \angle \text{AOQ}.$$

Weiter wird nun $T\alpha \cos \angle$ AOQ die Höhe des auf α, β, γ construirten Parallelepipeds darstellen und nach (c. 33) ist

$$TV\beta\gamma = \text{Flächeninhalt Parallelogramm BOC.}$$

Man erhält demnach schlieszlich

$$S.\alpha\beta\gamma = \text{Volumen Parallelepiped OABC.}$$

Wenn jedoch in der Figur 56 die Vektoren β, γ umgetauscht würden, so wäre

$$\angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha} = \angle \mathrm{AOQ}$$

und

$$T\alpha \cos\left(\pi - \angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha}\right)$$

wäre die negativ genommene Höhe des Parallelepipeds. Somit hätte man auch erhalten

$$S.\alpha\beta\gamma = - \text{Volumen Parallelepiped OABC.}$$

Die erhaltenen Resultate lassen sich vereinigen zur nachstehenden Formel

$$S.\alpha\beta\gamma = \pm \text{Volumen Parallelepiped OABC} \quad . \; . \; . \; (c.\,36)$$

und es musz hierbei das obere oder das untere Zeichen genommen werden, je nachdem die Drehung von β nach γ, von der Seite, wo der Vektor α liegt, aus gesehen, negativ oder positiv erscheint.

Es wird deshalb $S.\alpha\beta\gamma$ verschwinden, wenn die Vektoren α, β, γ in einer Ebene enthalten sind oder in Zeichen

$$S.\alpha\beta\gamma = 0 \text{ wenn } \alpha, \beta, \gamma \;|||, \text{ und umgekehrt.} \; . \; . \; (c.\,37)$$

Man kann weiter schliessen

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha(\beta\gamma) = S.(\beta\gamma)\alpha \text{ nach } (b.\,153) = S.\beta\gamma\alpha. \; . \; (c.\,38)$$

oder in Worten: Bei einer cyclischen Umtauschung der Faktoren in einem drei Faktoren enthaltenden Produkte, bleibt der Skalarteil ungeändert. Man kann aber auch wie nachstehend transformiren

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha V\beta\gamma \text{ nach } (c.\,35^*) = S.\alpha(-V\gamma\beta) \text{ nach } (c.\,16) =$$
$$= -S.\alpha V\gamma\beta = -S.\alpha\gamma\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c.\,39)$$

oder in Worten: Bei acyclischer Umtauschung der Faktoren in einem drei Faktoren enthaltenden Produkte ändert sich das Zeichen.

Wir gehen weiter zum Vektorteil über

$$V.\alpha\beta\gamma = V.\alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma) = \alpha S\beta\gamma + V.\alpha V\beta\gamma,$$

weil $\alpha S\beta\gamma$ ein Vektorteil ist.

Man erhält jedoch nach ($c.$ 15)

$$V.\alpha V\beta\gamma = \tfrac{1}{2}\left[\alpha V\beta\gamma - (V\beta\gamma)\alpha\right]$$

und es ist identisch

$$0 = \tfrac{1}{2}\,[\alpha S\beta\gamma - (S\beta\gamma)\alpha]$$

Durch Addition wird somit erhalten

$$V.\alpha V\beta\gamma = \tfrac{1}{2}\,(\alpha\beta\gamma - \beta\gamma\alpha) \text{ nach } (c.\,18),\ (c.\,19)$$

oder

$$V.\alpha V\beta\gamma = \tfrac{1}{2}\,(\alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma - \beta\alpha\gamma - \beta\gamma\alpha)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[(\alpha\beta + \beta\alpha)\gamma - \beta(\alpha\gamma + \gamma\alpha)] \text{ nach } (c.\,18), (c.\,19)$$

und zuletzt nach ($c.$ 14)

$$V.\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (c.\,40)$$

Indem man dieses Resultat in den für $V.\alpha\beta\gamma$ erhaltenen Ausdruck einträgt, erhält man

$$V.\alpha\beta\gamma = \alpha S.\beta\gamma - \beta S.\gamma\alpha + \gamma S.\alpha\beta \;.\;.\;.\;.\; (c.\,41)$$

Die Vektoren unter dem Zeichen S sind hierin commutativ.

Es folgt aus der zuletzt erhaltenen Gleichung unmittelbar

$$V.\gamma\beta\alpha = V.\alpha\beta\gamma \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (c.\,42)$$

88. Zu den drei vorigen Vektoren sei jetzt noch ein vierter ρ in Betracht gezogen. Unser Ausgangspunkt sei die Gleichung ($c.$ 40).

Wenn wir in derselben α durch $V\alpha\rho$ ersetzen und der Kürze halber

$$V.V\alpha\rho V\beta\gamma \text{ anstatt } V(V\alpha\rho.V\beta\gamma)$$

schreiben, so erhalten wir

$$V.V\alpha\rho V\beta\gamma = \gamma S.\beta V\alpha\rho - \beta S.\gamma V\alpha\rho$$
$$= \gamma S.\beta\alpha\rho - \beta S.\gamma\alpha\rho, \text{ weil } \beta S\alpha\rho \text{ und } \gamma S\alpha\rho \text{ Vektoren sind}$$

oder nach ($c.$ 39)

$$V.V\alpha\rho V\beta\gamma = -\gamma S.\alpha\beta\rho - \beta S.\gamma\alpha\rho \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (c.\,43)$$

und

$$V.V\beta\gamma V\alpha\rho = \beta S.\gamma\alpha\rho + \gamma S.\alpha\beta\rho$$

weil nach ($c.$ 16), wenn in der ersten Seite $V\beta\gamma$, $V\alpha\rho$ umgetauscht werden, das Zeichen geändert werden musz.

Es ist jedoch auch, indem man die Gleichung ($c.$ 43) auf $V.V\beta\gamma V\alpha\rho$ anwendet

$$V.V\beta\gamma V\alpha\rho = -\rho S\beta\alpha\gamma - \alpha S\rho\beta\gamma$$
$$= \rho S\alpha\beta\gamma - \alpha S\beta\gamma\rho \text{ nach } (c.\,38)\ (c.\,39) .\;.\; (c.\,44)$$

Aus der Verbindung der Gleichungen ($c.$ 43) ($c.$ 44) mit einander entspringt die Formel

$$\rho S.\alpha\beta\gamma = \alpha S.\beta\gamma\rho + \beta S.\gamma\alpha\rho + \gamma S.\alpha\beta\rho \;.\;.\;.\;.\; (c.\,45)$$

eine Relation, welche gestattet einen willkürlichen rechten Quotienten mit Hülfe dreier gegebenen rechten Quotienten auszudrücken.

Nimmt man von den beiden Seiten der erhaltenen Gleichung die Indices, so müssen dieselben nach (*b.* 81) auch einander gleich sein; und weil nach (*b.* 82)

$$I.\rho S(\alpha\beta\gamma) = I\rho . S\alpha\beta\gamma\,,$$

so ersieht man, dass in der Gleichung (*c.* 45) die nicht unter dem Zeichen S stehenden Vektoren ebenso gut als Vektoren wie als rechte Quotienten betrachtet werden können.

Es ist dies auch mit einem in ersten Abschnitte erhaltenen Resultate im Einklang.

Denn wenn wir die Gleichung (*c.* 36) beachten, so lässt sich (*c.* 45) auch in die Gestalt schreiben (wobei OP $= \rho$ angenommen ist)

$$\rho \text{ Vol. Ppd. OABC} = \alpha \text{ Vol. Ppd. OBCP} + \beta \text{ Vol. Ppd. OCAP} + \\ + \gamma \text{ Vol. Ppd. OABP}\,,$$

und dieses Resultat stimmt ganz mit der Gleichung (*a.* 36) überein.

Aus der Relation (*c.* 45) kann noch eine andre hergeleitet werden.

$$\rho S.\alpha\beta\gamma = \alpha S.\rho V\beta\gamma + \beta S.\rho V\gamma\alpha + \gamma S.\rho V\alpha\beta, \text{ nach } (c.\ 35^*), (b.\ 153)$$

$$= \alpha\frac{\rho V\beta\gamma + V\beta\gamma.\rho}{2} + \beta\frac{\rho V\gamma\alpha + V\gamma\alpha.\rho}{2} + \gamma\frac{\rho V\alpha\beta + V\alpha\beta.\rho}{2} \quad \text{nach } (c.\ 14)$$

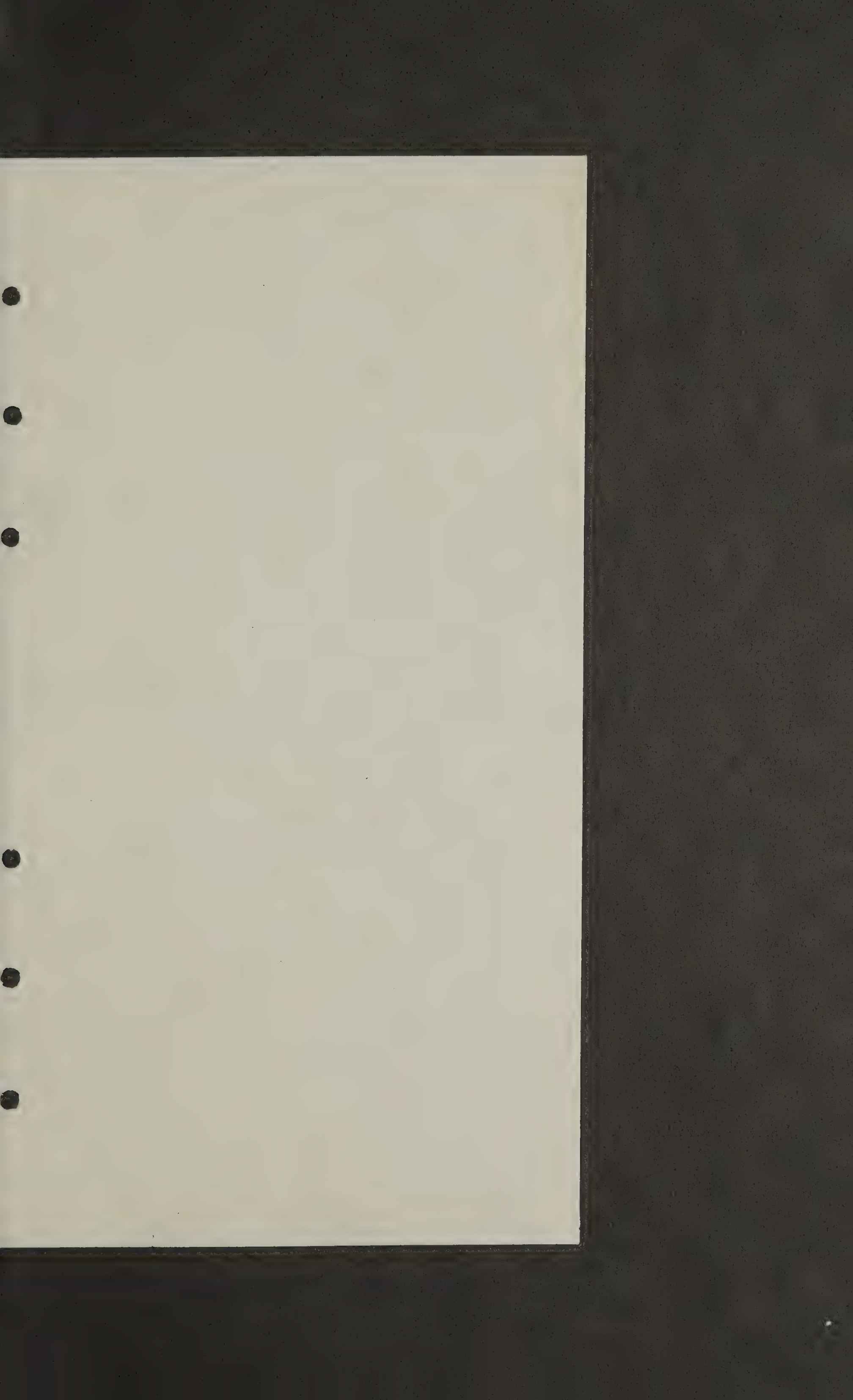
$$= \tfrac{1}{2}(\alpha\rho V\beta\gamma + \beta\rho V\gamma\alpha + \gamma\rho V\alpha\beta) + \tfrac{1}{4}[\alpha(\beta\gamma - \gamma\beta) + \\ + \beta(\gamma\alpha - \alpha\gamma) + \gamma(\alpha\beta - \beta\alpha)] \text{ nach } (c.\ 15)$$

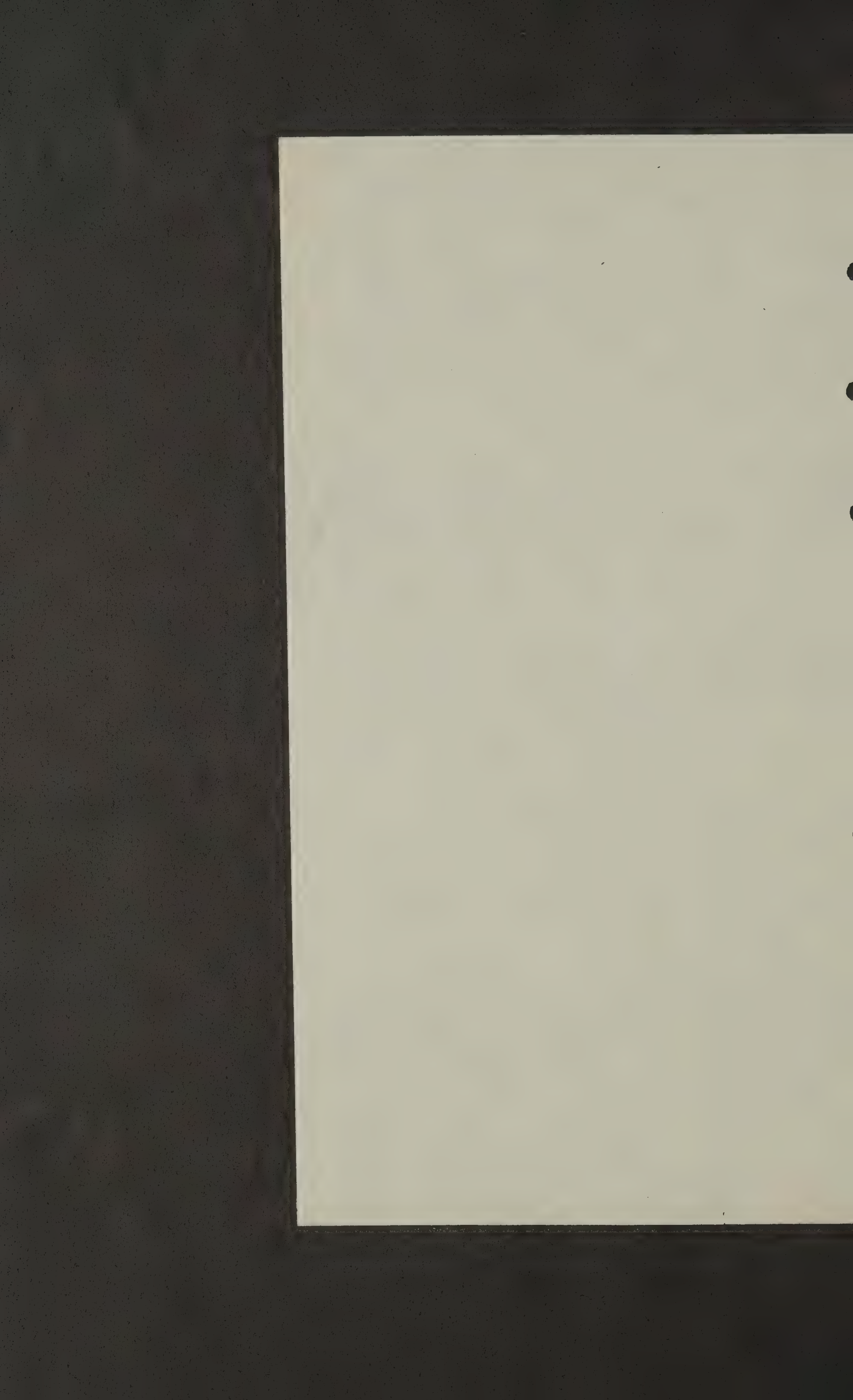
$$= \tfrac{1}{2}(\alpha\rho V\beta\gamma + \beta\rho V\gamma\alpha + \gamma\rho V\alpha\beta) + \tfrac{1}{4}[(\beta\gamma - \gamma\beta)\alpha + \\ + (\gamma\alpha - \alpha\gamma)\beta + (\alpha\beta - \beta\alpha)\gamma]\rho$$

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha\rho V\beta\gamma + \beta\rho V\gamma\alpha + \gamma\rho V\alpha\beta) + \tfrac{1}{2}\ V\beta\gamma.\alpha\rho + \\ + V\gamma\alpha.\beta\rho + V\alpha\beta.\gamma\rho \text{ nach } (c.\ 15).$$

Operirt man jetzt an die beiden Seiten der erhaltenen Gleichung mit dem Symbol V, so bleibt die erste Seite ungeändert; indem man jedes einzelne Glied der zweiten Seite nach Formel (*c.* 41) behandelt, erhält man

$$\rho S.\alpha\beta\gamma = S\alpha\rho.V\beta\gamma + S\beta\rho.V\gamma\alpha + S\gamma\rho.V\alpha\beta \ldots (c.\ 46)$$





Dieselbe Formel hätte auf einfachere Weise erhalten werden können.

Gesetzt es sei

$$\rho S\alpha\beta\gamma = x V\beta\gamma + y V\gamma\alpha + z V\alpha\beta,$$

so gilt es hieraus x, y, z zu bestimmen. Indem man die beiden Seiten dieser Gleichung mit α multiplicirt und nachher den Skalarteil nimmt, wird

$$\begin{aligned} S\alpha\rho . S\alpha\beta\gamma &= xS.\alpha V\beta\gamma + yS.\alpha V\gamma\alpha + zS.\alpha V\alpha\beta \\ &= xS\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Denn

$$S.\alpha V\gamma\alpha = S.(V\gamma\alpha)\alpha = S(\gamma\alpha.\alpha) = S\gamma\alpha^2 = \alpha^2 S\gamma,$$

weil α^2 eine skalare Grösze ist, und der letzte Ausdruck verschwindet, weil γ ein Vektor ist.

In gleicher Weise ist

$$S.\alpha V\alpha\beta = S.\alpha(\alpha\beta) = S\alpha^2\beta = \alpha^2 S\beta = 0.$$

Es ist somit

$$x = S\alpha\rho;$$

In analoger Weise erhält man

$$y = S\beta\rho, \quad z = S\gamma\rho.$$

Aus der Gleichung (*c*. 46), wo ρ ein willkürlicher Vektor ist, lässt sich noch schlieszen, dass die Bedingung der Complanarität,

$$S.\alpha\beta\gamma = 0$$

auch wie nachstehend geschrieben werden kann.

$$S\alpha\rho V\beta\gamma + S\beta\rho V\gamma\alpha + S\gamma\rho V\alpha\beta = 0, \text{ wenn } \alpha, \beta, \gamma \,|||\, . \quad (c.\,47)$$

89. Einige anderen Formeln mögen hier noch Platz finden:

1⁰.
$$\left.\begin{aligned} S.\alpha\beta\gamma &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha) \\ V.\alpha\beta\gamma &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\,48)$$

$$\begin{aligned} S.\alpha\beta\gamma &= S.\alpha V\beta\gamma \quad \text{nach } (c.\,35^*) \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha V\beta\gamma + (V\beta\gamma)\alpha] \text{ nach } (c.\,14) \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha V\beta\gamma - (V\gamma\beta)\alpha] \text{ nach } (c.\,16) \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha(\beta\gamma - S\beta\gamma) - (\gamma\beta - S\gamma\beta)\alpha] \\ &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha) \end{aligned}$$

$$V.\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma - S.\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha)$$

Ein allgemeinerer Beweis ist der nachstehende:

$$\begin{aligned} K.\alpha\beta\gamma &= K.\alpha(\beta\gamma) = K\beta\gamma . K\alpha \quad \text{nach } (b.\,54) \\ &= \gamma\beta . -\alpha \quad \text{nach } (c.\,13),\ (c.\,12) = -\gamma\beta\alpha \end{aligned}$$

und deshalb

$$S.\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}(1 + K)\,\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha)$$
$$V.\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}(1 - K)\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha)$$

2⁰.
$$\left.\begin{aligned} S.\alpha\beta\gamma\delta &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma\delta + \delta\gamma\beta\alpha) \\ V.\alpha\beta\gamma\delta &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma\delta - \delta\gamma\beta\alpha) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (c.\ 49)$$

Denn es wird

$$\begin{aligned} K.\alpha\beta\gamma\delta &= K\delta.K\gamma.K\beta.K\alpha \text{ nach } (b.\ 54) \\ &= -\delta.-\gamma.-\beta.-\alpha \text{ nach } (c.\ 12) \\ &= \delta\gamma\beta\alpha \end{aligned}$$

und dadurch wird die Richtigkeit der Formeln ($c.$ 49) einleuchten.

Es kann hieraus auch leicht eine allgemeine Regel gefolgert werden für die Skalar- und Vektorteile der Produkte von Vektoren, je nachdem dieselben eine gerade oder eine ungerade Zahl der Faktoren enthalten.

3⁰. Bisweilen können die nachstehenden Formeln Nutzen gewähren:

$$S.\alpha\beta\gamma\delta = S.\alpha\delta\gamma\beta = S.\gamma\beta\alpha\delta \quad \ldots\ldots\ldots (c.\ 50)$$

Denn es ist

$$S.\alpha\beta\gamma\delta = S.\alpha\, V\beta\gamma\delta = S.\alpha\, V\delta\gamma\beta \text{ nach } (c.\ 42) = S.\alpha\delta\gamma\beta$$
$$S.\alpha\beta\gamma\delta = S.(V\alpha\beta\gamma)\delta = S.(V\gamma\beta\alpha)\delta \text{ nach } (c.\ 42) = S.\gamma\beta\alpha\delta.$$

Weiter ist

$$S.\alpha\beta\gamma\delta = S.\beta\gamma\delta\alpha = S.\gamma\delta\alpha\beta = S.\delta\alpha\beta\gamma \quad \ldots\ldots (c.\ 51)$$

oder cyclische Umtauschung der Faktoren ist gestattet.

Denn

$$S.\alpha\beta\gamma\delta = S.\alpha(\beta\gamma\delta) = S.(\beta\gamma\delta)\alpha \text{ nach } (b.\ 153) = S.\beta\gamma\delta\alpha.$$

Durch die Anwendung dieser Formel auf die in ($c.$ 50) erhaltenen Beziehungen kann man neue Umtauschungen erhalten, doch wollen wir nicht näher darauf eingehen.

4⁰. Im Vorhergehenden fanden wir die allgemeine Formel ($c.$ 44) für den Vektorteil des Quaternions $V\alpha\beta.V\gamma\delta$. Wir wollen nun auch den Skalarteil dieses Ausdrucks transformiren. Es ist

$$S.V\alpha\beta\, V\gamma\delta = S.\alpha\beta\, V\gamma\delta, \text{ weil } S\alpha\beta\, V\gamma\delta \text{ ein Vektor ist,}$$
$$= S.\alpha\beta\frac{\gamma\delta - \delta\gamma}{2} \text{ nach } (c.\ 15)$$

$$= S\frac{\alpha(\beta\gamma + \gamma\beta)\delta - \alpha\gamma\beta\delta - \alpha\beta\delta\gamma}{2}$$

$$= S\frac{\alpha(\beta\gamma + \gamma\beta)\delta - \alpha\delta\beta\gamma - \alpha\beta\delta\gamma}{2} \text{ nach } (c.\ 50)$$

$$= S\frac{\alpha.2S\gamma\beta.\delta - \alpha.2S\delta\beta.\gamma}{2}$$

$$= S\gamma\beta S\alpha\delta - S\delta\beta S\alpha\gamma$$

oder kurz

$$S.\,V\alpha\beta\,V\gamma\delta = S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta \quad \ldots\ldots \quad (c.\ 52)$$

5°. Aus (*b* 134), angewandt auf den Fall, dass $q = \alpha\beta$, folgt unmittelbar

$$(S.\alpha\beta)^2 - (V.\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 53)$$

Denn es ist

$$(T.\alpha\beta)^2 = (T\alpha.T\beta)^2 = T\alpha^2 T\beta^2 = -\alpha^2. -\beta^2 = \alpha^2\beta^2.$$

Dieselbe Gleichung hätte natürlich aus (*c*. 14) (*c*. 15) erhalten werden können

$$(S\alpha\beta)^2 - (V\alpha\beta)^2 = (S\alpha\beta - V\alpha\beta)(S\alpha\beta + V\alpha\beta) = (K.\alpha\beta)\alpha\beta =$$
$$= \beta\alpha\alpha\beta = \beta\alpha^2\beta = \alpha^2\beta\beta = \alpha^2\beta^2.$$

Es ist auch leicht mit Hülfe der gefundenen Formeln zu zeigen, dass $IV\alpha\beta$ ein zu α und β senkrechter Vektor ist, wie wir schon aus dem Vorigen wissen, weil $\alpha\beta$ ein Quaternion in der Ebene der Vektoren α, β ist und somit auch $V\alpha\beta$ ein rechter Quotient in dieser Ebene. $IV\alpha\beta$ ist deshalb senkrecht zur Ebene der Vektoren α, β.

Der andere Beweis ist der nachstehende

$$S.(\alpha IV\alpha\beta) = S.\alpha V\alpha\beta \text{ der Bedeutung nach}$$
$$= S.\alpha(\alpha\beta) = S\alpha^2\beta = a^2 S\beta = 0$$

$$S.(\beta IV\alpha\beta) = S.\beta V\alpha\beta = S.(V\alpha\beta)\beta = S.(\alpha\beta)\beta = S.\alpha\beta^2 = \beta^2 S\alpha = 0.$$

Nach (*c*. 29) schlieszt man hieraus $V\alpha\beta \perp \alpha$ und $\perp \beta$.

90. Es erübrigt noch das Produkt eines Vektors mit oder durch einen Quaternion zu deuten und wir wollen allgemein setzen

$$q\alpha q' = qI^{-1}\alpha.q' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 54)$$

d. h. in einem solchen Produkte soll der Vektor durch den rechten Quotienten ersetzt werden, dessen Index dem Vektor gleich kommt.

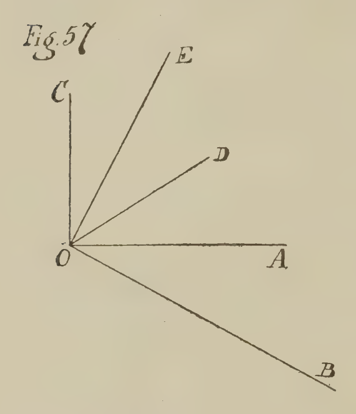
Im Artikel 28, Gleichung (b. 2), fanden wir schon Gelegenheit einen Ausdruck von der Form $q\alpha$ zu deuten. Es konnte diese Deutung jedoch nur einen Sinn haben für den Fall, wo der Quaternion q an den Vektor α operirte, wo deshalb q mit α complanar sein muszte.

Sehen wir zu, ob wir durch die in der Gleichung (c. 54) ausgesprochene Definition nicht mit jenem Artikel in Widerspruch geraten sind.

Es sei, dies zu untersuchen, in der Figur 57

$$\mathrm{OA} = \alpha, \quad q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}, \quad \text{somit } \mathrm{OB} = q\alpha \text{ nach Art. 28.}$$

Nehmen wir nun weiter den Ausdruck $q\alpha$ in dem durch (c. 53) ausgesprochenen Sinne. α ist sodann als ein rechter Quotient in einer Ebene senkrecht zu OA zu betrachten. Es sei OC die Durchschnittsgerade der Ebene des Quaternions q mit der Ebene des rechten Quotienten α; weiter sei



$$\mathrm{OC} : \mathrm{OD} = \alpha,$$

womit zugleich angenommen ist, dass

$$\mathrm{OD} \perp \mathrm{OC} \text{ und } \perp \mathrm{OA}.$$

Construirt man noch in der Ebene OCA den Vektor OE derart, dass

$$\mathrm{OE} : \mathrm{OC} = q,$$

so erhalten wir

$$q\alpha = \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OC}} \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OD}}.$$

Somit ist $q\alpha$ ein rechter Quotient oder auch in dem vorher erörterten Sinne dessen Index. Wir wollen noch zeigen, dass OB dieser Index ist. Denn es ist, weil OC, OE, OA, OB complanar sind und weil

$$\mathrm{OE} : \mathrm{OC} = q, \quad \mathrm{OB} : \mathrm{OA} = q$$

auch

$$\angle \mathrm{COE} = \angle \mathrm{AOB},$$

somit

$$\angle \text{EOB} = \frac{\pi}{2}.$$

Es ist aber weiter

$$\angle \text{DOB} = \frac{\pi}{2},$$

somit ist OB senkrecht zur Ebene des rechten Quotienten $q\alpha$. Von B aus gesehen erscheint die Drehung von OD nach OE positiv. Endlich ist noch

$$T.\text{OB} = \frac{T.\text{OB}}{T.\text{OA}}\, T.\text{OA} = \frac{T.\text{OE}}{T.\text{OC}}\, T.\text{OA} = \frac{T.\text{OE} : T.\text{OD}}{T.\text{OC} : T.\text{OD}}\, T.\text{OA} =$$
$$= T.\text{OE} : T.\text{OD}.$$

Weil nämlich

$$\alpha = \text{OC} : \text{OD}$$

so ist

$$T\alpha \text{ oder } T.\text{OA} = T.\text{OC} : T.\text{OD}.$$

Und aus diesen Beziehungen geht hervor, dass OB der Index des Quotienten OE : OD ist.

Somit sind die in Art. 28 und die hier gegebene Deutung des Ausdruckes $q\alpha$, für den Fall $q \,|||\, \alpha$, mit einander im Einklange.

91. Eine Formel, welche bisweilen Nutzen gewährt, und welche hier Platz finden möge, ist

$$Sq^2 + (Siq)^2 + (Sjq)^2 + (Skq)^2 = Nq \quad . \; . \; . \; . \; (c.\, 55)$$

wo der Quaternion q willkürlich sein kann.

Schreibt man nämlich q in die viergliedrige Form

$$w + xi + yj + zk,$$

so wird

$$Sq = w, \; Siq = -x, \; Sjq = -y, \; Skq = -z,$$

somit ist die erste Seite der Gleichung ($c.$ 55) identisch mit

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \text{ oder mit } Nq \text{ nach } (b.\, 161).$$

Wenn specieller statt q ein Vektor ρ gewählt wird, so geht die vorige Gleichung über in

$$(Si\rho)^2 + (Sj\rho)^2 + (Sk\rho)^2 = N\rho = -\rho^2 \quad . \; . \; . \; . \; (c.\, 56)$$

und es ist dies die zumeist sich vorfindende Form jener Gleichung.

92. Wie schon in Art. 78 erwähnt, können bei allen vorkommenden Operationen die Vektoren durch rechte Quaternionen ersetzt werden und umgekehrt.

In gleicher Weise kann man, wenn eine Gleichung zwischen Vektoren gegeben ist, in derselben die Vektoren als rechte Quaternionen betrachten und umgekehrt. Nach Gleichung (*b*. 81) nämlich kann man aus der Gleichheit der Quaternionen zu derjenigen der Indices, d. h. der Vektoren, schlieszen und umgekehrt.

Dieses Princip wollen wir in den nächsten Kapitteln mehrmals anwenden ohne es ausdrücklich hervorzuheben. Wir überlassen sodann dem Studirenden jedesmal zu schlieszen, wo wir von den Indices auf die rechten Qnotienten oder umgekehrt übergegangen sind. Bei einigen sehr wenigen Beispielen werden wir dies angeben.

EINIGE GEOMETRISCHEN ÖRTER.

---

93. Im ersten Abschnitte fanden wir, dass geometrische Örter dadurch dargestellt werden, dass ein Vektor ρ als Funktion zweier oder dreier Vektoren und einer oder mehrerer Skalargröszen u, v, ... erscheint.

Den Vektor ρ wollen wir den abhängigen Veränderlichen, die Gröszen $u, v, \ldots$ die unabhängigen Veränderlichen nennen.

Die in den beiden vorigen Abschnitten eingeführten Gröszen und die daran geknüpften Betrachtungen setzen uns nunmehr in den Stand auch ohne Zuhülfenahme unabhängig veränderlicher Skalare geometrische Örter darzustellen und wir wollen im Folgenden einige einfachen derselben näher ins Auge fassen.

94. In Art. 20 ergab sich, dass mit

$$\rho = \frac{\alpha + u\beta}{1 + u} \ldots\ldots\ldots\ldots (d. 1)$$

bei veränderlichem u eine Gerade, die Verbindungslinie der Endpunkte der Vektoren α, β, bezeichnet wird. Man erhält daraus

$$(1 + u)\rho = \alpha + u\beta$$

oder

$$\rho + u\rho = \alpha + u\beta$$
$$u(\rho - \beta) = \alpha - \rho.$$

Es sind hierin α, β, ρ als Vektoren zu betrachten. Doch wird die Gleichheit auch bestehen bleiben, wenn man α, β, ρ als rechte Quotienten auffasst nach (b. 81) (b. 82). Indem in

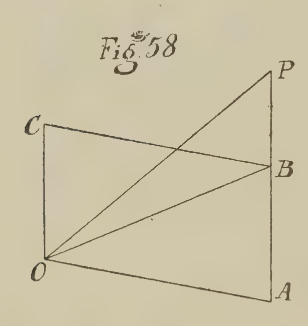
diesem Falle beiderseits mit $\frac{1}{\rho - \beta}$ multiplicirt wird, erhält man

$$u = \frac{\alpha - \rho}{\rho - \beta} \text{ oder } -u = \frac{\rho - \alpha}{\rho - \beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d. 2)$$

Die zweite Seite ist ein Quaternion, und derselbe muss dem Skalare $-u$ gleich sein; es folgt daraus unmittelbar, dass die nachstehende Relation gültig sein musz

$$V\frac{\rho - \alpha}{\rho - \beta} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d. 3)$$

Umgekehrt kann aber auch (d. 1) aus (d. 3) zurückerhalten werden und somit stellt die letzte Gleichung, ebenso gut wie (d. 1) die Verbindungsgerade der Endpunkte der Vektoren α, β dar. Versuchen wir dieses Resultat unabhängig von dem Vorhergehenden zu deuten; mit Hülfe der Figur 58 gelingt dies leicht.



Es sei

$$\rho = \mathrm{OP}, \; \alpha = \mathrm{OA}, \; \beta = \mathrm{OB},$$

und dadurch

$$\mathrm{AP} = \rho - \alpha, \; \mathrm{BP} = \rho - \beta.$$

Die Gleichung (d. 3) sagt aus, dass die Vektoren AP, BP entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, und dies kann nur der Fall sein, wenn P auf der Geraden AB liegt.

Es kann der Gleichung (d. 3) auch eine andere Gestalt erteilt werden. Denn es folgt aus (d. 3), dass

$$V\left(\frac{\rho - \alpha}{\rho - \beta} - 1\right) = 0 \text{ nach } (b. 137)$$

oder

$$V\frac{\beta - \alpha}{\rho - \beta} = 0.$$

Nun musz aber auch weiter

$$V\frac{\rho - \beta}{\beta - \alpha} = 0$$

sein. Indem wir einen neuen Vektor

$$\gamma = \beta - \alpha = OC = AB$$

einführen, ersehen wir, dass

$$V\frac{\rho - \beta}{\gamma} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d. 4)$$

eine Gerade darstellt, welche durch den Endpunkt des Vektors β parallel zu γ gezogen wird.

Man hätte die Gleichung (d. 3) noch auf andre Weise unmittelbar als Gleichung einer Geraden erhalten können.

Denn

$$TV(\alpha - \rho)(\beta - \rho)$$

ist nach (c. 33) dem Flächeninhalte des Dreiecks PAB gleich. Nach unsren Voraussetzungen soll aber dieses Dreieck verschwinden, und es musz somit ρ der Gleichung genügen:

$$TV(\alpha - \rho)(\beta - \rho) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d. 5)$$

Das Verschwinden des Tensors eines Quaternions führt aber das Verschwinden des Quaternions selbst mit sich [1]). Somit erhalten wir

$$V(\alpha - \rho)(\beta - \rho) = 0$$

und weil $(\beta - \rho)^{-2}$ eine Skalargrösze ist, folgt hieraus, wenn die zuletzt erhaltene Relation durch $(\beta - \rho)^{-2}$ dividirt wird, die Gleichung (d. 3).

In derselben Weise kann anstatt (d. 4) geschrieben werden

$$V(\rho - \beta)\gamma = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d. 4^*)$$

95. Auf analogem Wege kann leicht der Bedingung Ausdruck gegeben werden, dass der Endpunkt eines Vektors ρ der Ebene der Endpunkte dreier Vektoren α, β, γ angehört. Es müssen sodann nämlich die Vektoren

$$\alpha - \rho, \; \beta - \rho, \; \gamma - \rho$$

---

1) Man sagt nämlich ein Quaternion verschwinde, wenn dessen Zähler verschwindet, während dasselbe nicht von dem Nenner gilt. (Vergl. Art. 38, Gl. 28). Somit

$$q = \frac{0}{\alpha} = 0$$

Es ist sodann aber weiter

$$Tq = \frac{T0}{T\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad Uq = \frac{U0}{U\alpha} \gtrless 0$$

denn der Einheitsvektor der Grösze Null und im allgemeinen eines jeden Skalars verschwindet nicht, sondern wird unbestimmt.

Aus $Tq = 0$ allein folgt daher auch $q = 0$.

complanar sein, und somit nach (*c.* 37)

$$S.(\alpha - \rho)(\beta - \rho)(\gamma - \rho) = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (d.\ 6)$$

Es lässt sich diese Gleichung wieder leicht umgestalten. Denn wenn man das Produkt berechnet, und beachtet, dass

$$S.\rho^2\gamma,\ S.\rho\beta\rho,\ S.\alpha\rho^2,\ S.\rho^3$$

verschwinden, erhält man

$$S[\alpha\beta\gamma - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)\rho] = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (d.\ 7)$$

Diese Gleichung ist somit, wie die Gleichung (*d.* 6), als die Quaterniongleichung der Ebene zu betrachten, welche durch die Endpunkte der Vektoren α, β, γ hindurch geht.

Im allgemeinen kann jedoch die Quaterniongleichung einer Ebene einfacher erhalten werden, wenn man dieselbe auf andre Weise bestimmt, z. B. durch einen zur Ebene gehörigen Punkt und durch eine Senkrechte zur Ebene.

Es sei der Endpunkt eines Vektors $\beta = \mathrm{OB}$ ein gegebener Punkt der zum Vektor $\alpha = \mathrm{OA}$ senkrechten Ebene; ist P ein willkürlicher Punkt dieser Ebene, so musz der Vektor

$$\mathrm{BP} = \rho - \beta$$

senkrecht zu OA sein, d. h. es musz

$$S\frac{\rho - \beta}{\alpha} = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (d.\ 8)$$

Es ist diese Gestalt der Gleichung einer Ebene in (*d.* 7) enthalten, wenn man statt derselben schreibt

$$S[\rho(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) - \alpha\beta\gamma] = 0$$

und wie nachstehend transformirt

$$S.\rho V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) - S\alpha\beta\gamma = 0$$

oder

$$S\left[\rho - \frac{S\alpha\beta\gamma}{IV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)}\right] IV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0 \,.\ (d.\ 8^*)$$

Hieraus schlieszt man, dass die Ebene, welche die Endpunkte der drei Vektoren α, β, γ enthält, senkrecht zum Vektor

$$IV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)$$

sein musz, und weiter, dass das Lot, welches aus dem Vektorenanfangspunkt auf jene Ebene gefällt wird, durch

$$S\alpha\beta\gamma.(V\beta\gamma + V\gamma\alpha + V\alpha\beta)^{-1}$$

dargestellt wird.

Es lässt sich dieses Resultat auch leicht direkt nachweisen. Wenn man nämlich setzt

$$IV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = r,$$

so wird

$$S\alpha r = S.\alpha V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = S\alpha(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = S.\alpha\beta\gamma$$

und in gleicher Weise

$$S.\beta r = S.\alpha\beta\gamma\,, \quad S.\gamma r = S.\alpha\beta\gamma\,,$$

und hieraus

$$S(\beta - \gamma)\, r = 0\,, \quad S(\gamma - \alpha)\, r = 0\,, \quad S(\alpha - \beta)\, r = 0$$

d. h. es ist nach (*c.* 29) r senkrecht zu den Vektoren $\beta - \gamma$, $\gamma - \alpha$, $\alpha - \beta$, welche sämtlich in der durch die Endpunkte von α, β, γ gehenden Ebene enthalten sind.

In dem besondere Falle, dass β der Richtung nach mit α zusammenfällt, geht (*d.* 8) über in

$$S\frac{\rho}{\alpha} = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 9)$$

wo a ein Skalar ist. Es wird hiermit eine Ebene in einem Punkt der Geraden OA senkrecht zu OA bezeichnet.

Die Gleichung (*d.* 8) einer Ebene kann leicht noch umgestaltet werden. Setzen wir nämlich

$$\frac{\rho - \alpha}{\beta} = q$$

und erinnern wir uns der Formel (*b.* 116), aus welcher gefolgert werden kann

$$N(q + 1) = Nq + 1 + 2\, Sq$$
$$N(q - 1) = Nq + 1 - 2\, Sq$$

so ersieht man, dass wenn die Gleichung (*d.* 8) stattfindet, zugleich auch

$$N(q + 1) = N(q - 1) \ \text{ oder } \ \frac{N(q + 1)}{N(q - 1)} = 1$$

und schlieszlich

$$T\frac{q + 1}{q - 1} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 9^*)$$

Umgekehrt kann aus (*d.* 9*) die Gleichung (*d.* 8) direkt hergeleitet werden. Es kann deshalb auch (*d.* 9*) als die Gleichung der Ebene betrachtet werden.

96. Wir wollen uns in diesem Artikel mit der Kugel beschäf-

tigen. Es ist ein Leichtes eine Form der Gleichung derselben anzugeben. Denn wenn A der Mittelpunkt, P irgend ein Punkt der Kugeloberfläche ist, und $OA = \alpha$, $OP = \rho$ gesetzt wird, so soll der Vektor AP eine vorgeschriebene Länge $T\beta$ haben, und dies wird durch die nachstehende Gleichung ausgesprochen

$$T(\rho - \alpha) = T\beta \text{ oder } T\frac{\rho - \alpha}{\beta} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,10)$$

Dieser Gleichung kann leicht eine andere Gestalt erteilt werden. Denn nach ($b.$ 134) ist dieselbe aequivalent mit

$$\left(S\frac{\rho - \alpha}{\beta}\right)^2 - \left(V\frac{\rho - \alpha}{\beta}\right)^2 = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,11)$$

einer Form, welche deshalb wichtig ist, weil dieselbe die Kugel als einen besonderen Fall des Ellipsoids erscheinen lässt, dessen Gleichung wir nachher angeben wollen.

Hätte man vor der Anwendung der Gleichung ($b.$ 131) in ($d.$ 10) Zähler und Nenner des Bruches verwechselt, so hätte man erhalten

$$\left(S\frac{\beta}{\rho - \alpha}\right)^2 - \left(V\frac{\beta}{\rho - \alpha}\right)^2 = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,12)$$

Ein besonderer Fall ist derjenige, dass

$$T\beta = T\alpha.$$

Es geht sodann ($d.$ 10) über in

$$T\left(\frac{\rho}{\alpha} - 1\right) = 1 \text{ oder } N\left(\frac{\rho}{\alpha} - 1\right) = 1.$$

Nach ($b.$ 116) kann hierfür geschrieben werden:

$$N\frac{\rho}{\alpha} - 2\,S\frac{\rho}{\alpha} = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2} = S\frac{\rho}{\alpha} : N\frac{\rho}{\alpha} = S\frac{\alpha}{\rho} \text{ nach } (b.\,100)$$

und schlieszlich

$$S\frac{2\,\alpha}{\rho} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,13)$$

97. Wenn wir die Resultate der beiden vorhergehenden Artikel mit einander in Verbindung setzen, so geraten wir zu dem Ergebnis, dass die beiden Gleichungen ($d.$ 14) zusammen

$$S\frac{\rho - \alpha}{\beta} = 0 \text{ und } T\frac{\rho - \gamma}{\delta} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,14)$$

einen Kreis darstellen als Durchschnittscurve einer Ebene und einer Kugel.

Ein besonderer Fall ist es, welcher uns am wichtigsten scheint, nämlich derjenige, wo $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$. Die Ebene geht sodann durch den Mittelpunkt A der Kugel. Das System der Gleichungen

$$S\frac{\rho - \alpha}{\beta} = 0,\ T\frac{\rho - \alpha}{\beta} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d.\,15)$$

bestimmt somit einen grösten Kreis der Kugel, aus dem Endpunkte des Vektors α mit dem Radius $T\beta$ in einer Ebene senkrecht zum Vektor β beschrieben. Die diesen Gleichungen genügenden Vektoren gehören somit der Fläche eines Kegels an, dessen Scheitel O und dessen Grundfläche jener Kreis ist, oder in anderen Worten: der Vektor ρ beschreibt einen Vektorkegel, wie wir ihn im ersten Abschnitt definirten.

Es musz daher möglich sein aus den beiden Gleichungen ($d.$ 15) den Vektor ρ in die Gestalt $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ zu erhalten, und in der Tat gelingt dies. Denn wenn man die Gleichung ($d.$ 11) statt der zweiten der Relationen ($d.$ 15) nimmt, so wird dieselbe, indem man die erste dieser Gleichungen beachtet

$$\left(V\frac{\rho - \alpha}{\beta}\right)^2 = -1$$

oder nach der allgemeinen Theorie der Potenzen und Wurzeln von Quaternionen

$$V\frac{\rho - \alpha}{\beta} = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d.\,16)$$

Indem man zu diesem Resultat die erste der Gleichungen ($d.$ 15) addirt, erhält man

$$\frac{\rho - \alpha}{\beta} = \sqrt{-1} \text{ und hieraus } \rho = \alpha + \sqrt{-1}\,\beta.$$

Es bedeutet hierin ρ den Vektor irgend eines Punktes des durch die Gleichungen ($d.$ 15) dargestellten Kreises und $\sqrt{-1}$ einen rechten Versor in einer bestimmten Ebene wirksam.

Wenn nun aber die Gleichung

$$\frac{\rho - \alpha}{\beta} = \sqrt{-1}$$

die sämtlichen Punkte des Kreises darstellen soll, so müssen auch unter dem Symbole $\sqrt{-1}$ sämtliche in allen verschiedenen Ebenen wirksamen rechten Versoren verstanden werden

und dieses Resultat ist in Übereinstimmung mit der im ersten Abschnitt gegebenen Deutung des Symbols $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$.

98. Als besonders wichtig für unsre Theorie der imaginären Grösze $\sqrt{-1}$ möge das nachstehende betrachtet werden.

In den Gleichungen des vorigen Artikels

$$S\frac{\rho - \alpha}{\beta} = 0\,, \quad V\frac{\rho - \alpha}{\beta} = \sqrt{-1}\,, \quad \frac{\rho - \alpha}{\beta} = \sqrt{-1} \quad . \; (d.\,17)$$

war ρ der Vektor eines bestimmten Punktes eines Kreises und $\sqrt{-1}$ auch ein bestimmter rechter Versor.

Wird in dem Symbole

$$\rho = \alpha + \sqrt{-1}\,\beta$$

die Grösze ρ als Vektorkegel betrachtet, so ist der Versor $\sqrt{-1}$ ein unbestimmter.

Wir geraten somit zur Unterscheidung zweier Symbole $\sqrt{-1}$. Dasselbe kann nämlich *einen einzigen* rechten Versor in einer willkürlichen aber bestimmten Ebene bedeuten und in diesem Falle ergibt die Substitution der dritten der Gleichungen ($d.$ 17) in die beiden ersteren

$$S.\sqrt{-1} = 0\,, \quad V.\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.$$

Es kann aber auch $\sqrt{-1}$ *die Gesamtheit* der rechten Versoren, in allen verschiedenen Ebenen wirksam gedacht, darstellen. Wie wir im Art. 79 ersahen, kommt dem Zeichen $\sqrt{-1}$ sodann aber Skalarcharakter zu, indem wir dort die Gleichungen fanden

$$S.\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,, \quad V.\sqrt{-1} = 0.$$

99. Man pflegt zu sagen, die Gleichung

$$\rho = \alpha\,,$$

wo $\alpha = OA$, stelle den Punkt A dar.

Allgemeiner wollen wir sagen, die Gleichung

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,18)$$

wo α, β, γ willkürliche Vektoren, x, y, z willkürliche, aber bestimmte Skalare bedeuten, gehöre einem Punkte an und wir können sodann zwei Fälle unterscheiden.

1⁰. x, y, z, α, β, γ sind reelle Gröszen.

Die Gleichung ($d.$ 18) stellt sodann den Endpunkt dar des Vektors, dessen Componenten nach den Richtungen α, β, γ den Gröszen $x\alpha$, $y\beta$, $z\gamma$ gleich kommen.

2°. Von den Symbolen x, y, z, α, β, γ ist eins oder sind mehrere complex.

Setzt man

$$x = x_1 + \sqrt{-1}\, x_2, \quad y = y_1 + \sqrt{-1}\, y_2, \quad z = z_1 + \sqrt{-1}\, z_2,$$
$$\alpha = \alpha_1 + \sqrt{-1}\, \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \sqrt{-1}\, \beta_2, \quad \gamma = \gamma_1 + \sqrt{-1}\, \gamma_2,$$

wo x_1, x_2, ... α_1, α_2, ... reelle Skalare und Vektoren bedeuten, so ergibt sich aus (d. 18)

$$\rho = x_1\alpha_1 + y_1\beta_1 + z_1\gamma_1 - x_2\alpha_2 - y_2\beta_2 - z_2\gamma_2$$
$$+ \sqrt{-1}\,(x_2\alpha_1 + y_2\beta_1 + z_2\gamma_1 + x_1\alpha_2 + y_2\beta_1 + z_1\gamma)$$

Man kann nun weiter α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 mittelst dreier nicht complanaren Vektoren λ, μ, ν linear ausdrücken und erhält sodann eine Relation von der Form

$$\rho = a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + \sqrt{-1}\,(a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu) \quad . \; . \quad (d.\, 19)$$

oder

$$\rho = a\lambda + b\mu + c\nu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d.\, 20)$$

wo nun a, b, c complexe Skalare, λ, μ, ν aber reelle Vektoren sind.

In diesem Falle gehört der Vektor ρ der Gleichungen (d. 18), (d. 19), (d. 20) einem Vektorkegel an oder, wie wir sagen wollen, einem jeden Punkte der Kreisperipherie, welche die Grundfläche jenes Vektorkegels ist.

Im Anschluss an den Anfang dieses Artikels sagen wir sodann weiter, die Gleichung (d. 18) stelle einen imaginären Punkt dar und diese Redensart führt zur nachstehenden wichtigen Identificirung:

Ein imaginärer Punkt ist eine Kreisperipherie mit einem bestimmten Radius um einen bestimmten Mittelpunkt in einer bestimmten Ebene beschrieben [1]).

1) Herr Prof. Korteweg in Amsterdam hatte die Güte mich darauf aufmerksam zu machen, dass im Jahre 1889 schon von zwei französischen Mathematikern, den Herren Laguerre und Tarry, eine geometrische Darstellung imaginärer Punkte in der Ebene in dem Pariser Congres der „Association française pour l'avancement des sciences" vorgetragen worden ist. Soweit es mir durch das Wohlwollen des Herrn Prof. Schoute in Groningen möglich gewesen ist die seitdem veröffentlichten Theorieen kennen zu lernen, meine ich schlieszeu zu können, dass Herr Laguerre als Darstellung des imaginären Punktes in der Ebene wählt die Durchschnittspunkte des von mir zu Hülfe gezogenen Cykels mit einer Ebene, während Herr Tarry

Die Namen Radius und Mittelpunkt wollen wir auch bei dem imaginären Punkt beibehalten. Die Grösze $a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu$ in (*d.* 19) soll der Mittelpunktsvektor, $a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu$ die Normale des imaginären Punktes heiszen. Die Länge der Normale ist dem Radius des imaginären Punktes gleich.

100. Wir haben in dieser Weise eine geometrische Darstellung imaginärer Punkte gewonnen. Allein eine völlige Befriedigung wird dieselbe schwer gewähren können, weil dabei

---

zwei andere Punkte dazu verwendet, nämlich den Anfangs- und den Endpunkt der Normale eines Cykels.

Den Weg, auf welchem die genannten Mathematiker zu dieser Darstellung geraten sind, findet sich nicht verzeichnet; doch glaube ich berechtigt zu sein anzunehmen, dass derselbe mit der Theorie der Quaternionen in keinerlei Beziehung steht. Im Art. 105* werde ich näher auf die Betrachtungen des Herrn Tarry zurückkommen.

Hrn Prof. Korteweg verdanke ich auch die Bemerkung, dass man in der analytischen Geometrie zu derselben geometrischen Darstellung imaginärer Punkte wie die von mir vertretene, gelangt, wenn man bei rechtwinkligen Coordinaten als Definition der Distanz d zweier Punkte $a, b, c;\ a_1, b_1, c_1$, welche reell oder imaginär sein können, wählt

$$d^2 = (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2$$

und nun die reellen Punkte x, y, z bestimmt, welche von dem imaginären Punkte $a_1 + a_2\sqrt{-1},\ b_1 + b_2\sqrt{-1},\ c_1 + c_2\sqrt{-1}$ eine Distanz Null haben.

Denn dadurch ergibt sich

$$(x - a_1 - a_2\sqrt{-1})^2 + (y - b_1 - b_2\sqrt{-1})^2 + (z - c_1 - c_2\sqrt{-1})^2 = 0$$

oder

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$

und

$$a_2(x - a_1) + b_2(y - b_1) + c_2(z - c_1) = 0.$$

Die Punkte x, y, z sind somit enthalten in dem Durchschnitt einer Kugel um den Mittelpunkt a_1, b_1, c_1 mit dem Radius $\sqrt{(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}$ beschrieben in einer Ebene, welche den Kugelmittelpunkt enthält und senkrecht ist zum Vektor mit den Projectionen a_2, b_2, c_2 auf die Coordinatenachsen.

In ähnlicher Weise kann man auch in der Quaternionentheorie verfahren, wenn man die Annahme macht ein konisch spaltender Quaternion verschwinde, wenn dessen Tensor der Null gleich kommt.

Denn aus

$$\rho = \alpha + \sqrt{-1}\,\beta$$

folgt sodann

$$N(\rho - \alpha - \sqrt{-1}\,\beta) = 0$$

Oder nach (*b.* 210)

$$N(\rho - \alpha) = N\beta \text{ und } S(\rho - \alpha)\beta = 0$$

Gleichungen, welche ebenfalls eine Kugel und eine Ebene darstellen.

zwei conjugirt imaginäre Punkte durch dasselbe Gebilde veranschaulicht werden.

Diesem Übelstande abzuhelfen erscheint es wünschenswert mit dem Begriffe der Spaltung eines Vektors denjenigen einer gewissen dabei auftretenden Reihenfolge der einzelnen durch die Spaltung entstandenen Elemente zu verbinden.

Wir wollen daher annehmen, das Symbol $\sqrt{-1}$ an einen Vektor β operirend, spalte denselben in einen Kreis, dessen Elementarpunkte in einer bestimmten Richtung auf einander folgen z. B. in einer Richtung, welche von der Seite aus, nach welcher β errichtet ist, gesehen, der Bewegung der Zeiger einer Uhr entgegengesetzt erscheint.

Einem derartigen Kreise ist schon der Name »Cykel” beigelegt worden. Die Richtung, in die der Kreis beschrieben gedacht wird, kann durch eine hinzugefügte Pfeilspitze verzeichnet werden. Ein willkürlicher Kreis enthält im allgemeinen zwei Cykel entgegengesetzter Richtung.

Es wird nun aber weiter einleuchten, dass der Cykel

$$-\sqrt{-1}\,\beta \text{ oder } \sqrt{-1}\,(-\beta)$$

von der Seite des Vektors $-\beta$ aus gesehen mit demjenigen, welcher $\sqrt{-1}\,\beta$ darstellt, von der Seite des Vektors β aus betrachtet, übereinstimmen musz. In absolutem Sinne genommen muss sodann aber der Cykel $-\sqrt{-1}\,\beta$ dem andern $\sqrt{-1}\,\beta$ entgegengesetzt sein.

Somit können wir auch weiter das nachstehende Resultat aussprechen:

Die beiden conjugirt imaginären Punkte $\alpha+\sqrt{-1}\,\beta$, $\alpha-\sqrt{-1}\,\beta$ werden durch zwei einander entgegengesetzte, einen einzigen Kreis bildende Cykel geometrisch dargestellt.

Unter der Normale eines Cykels $\alpha+\sqrt{-1}\,\beta$ wollen wir stets die Achse desselben verstehen nach *der* Richtung gezogen, von welcher aus gesehen der Cykel entgegengesetzt der Bewegung der Zeiger einer Uhr durchlaufen wird. Die Normalen zweier conjugirt imaginären Punkte sind somit einander entgegengesetzt, während der Radius und der Mittelpunkt derselben übereinstimmen.

101. Wenn ein Vektor

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d. 21)$$

wo α, β, γ reell sind und x, y, z complex sein können, einer Bedingung

$$f(x, y, z) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d. 22)$$

unterworfen ist, so beschreibt ρ eine Oberflache, wie schon im ersten Abschnitt erörtert ist.

Dabei können aber zwei Fälle unterschieden werden:

1⁰. Die Coefficienten der Skalare x, y, z in (d. 22) sind reell. In diesem Falle wird auch die von ρ beschriebene Oberfläche eine reelle genannt.

Setzen wir voraus, die Funktion f könne nach dem Taylorschen Satze dargestellt werden und setzen wir weiter

$$x = x_1 + x_2 \sqrt{-1}, \; y = y_1 + y_2 \sqrt{-1}, \; z = z_1 + z_2 \sqrt{-1} \quad (d. 23)$$

und nach einer gebräuchlichen symbolischen Schreibweise

$$\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)^p f(x_1, y_1, z_1) = \Delta_p f$$

so lassen sich aus (d. 22) zwei andere Gleichungen herleiten von der Form

$$\left.\begin{array}{r} f - \frac{1}{2} \Delta_2 f + \frac{1}{2.3.4} \Delta_4 f \ldots = 0 \\ \Delta_1 f - \frac{1}{2.3} \Delta_3 f + \frac{1}{2.3.4.5} \Delta_5 f \ldots = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (d. 24)$$

wo f stets anstatt $f(x_1, y_1, z_1)$ geschrieben ist.

Es geht weiter (d. 21) über in

$$\rho = x_1\alpha + y_1\beta + z_1\gamma + \sqrt{-1}\,(x_2\alpha + y_2\beta + z_2\gamma) \quad . \quad (d. 25)$$

Indem man nun Werte x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_3 bestimmt, welche den Relationen (d. 24) genügen und dieselben bei (d. 25) verwendet, findet man die reellen und die imaginären Punkte der reellen Oberfläche (d. 22).

Eine allgemeine Bemerkung mag hierbei noch Platz finden. Aus der Form der Gleichungen (d. 24) ist nämlich unmittelbar einleuchtend, dass, wenn denselben ein Wertsystem x_1, y_1 z_1, x_2, y_2, z_2 genügt, ebenfalls das System x_1, y_1, z_1, $-x_2$, $-y_2$, $-z_2$ diesen Relationen Genüge leisten musz.

Bei einer reellen Oberfläche kommen somit die imaginären Punkte stets paarweise conjugirt vor, sodass dieselben stets

durch Kreise, in den beiden Richtungen durchlaufen, dargestellt werden.

2°. Die Coefficienten der Skalare x, y, z in (d. 22) sind complex. Die von dem Vektor ρ beschriebene Oberfläche wollen wir sodann eine allgemeine Oberfläche nennen.

Wenn f z. B. eine lineare Gleichung ist mit complexen Coefficienten, so haben wir es mit einer allgemeinen Ebene zu tun. In derselben Weise wollen wir von einer allgemeinen Oberfläche zweiten, dritten Grades u. s. w. reden.

Wenn man nun die Substitution (d. 23) in (d. 22) vornimmt und die reellen Glieder von den imaginären trennt, so erhält man wieder zwei Relationen, denen die Gröszen x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 genügen müssen, die aber eine ganz andre Form als (d. 24) haben.

Es wird sich nun finden, dass die imaginären Punkte der allgemeinen Oberfläche nicht stets paarweise conjugirt vorkommen, sodass dieselben in diesem Falle durch Cykel veranschaulicht werden.

102. Wenn mit (d. 21) zwei Gleichungen von der Form (d. 22) verbunden sind, sodass ρ einer Raumcurve angehört, so ergeben sich hieraus vier Gleichungen, entweder paarweise von der Form (d. 24) oder von andrer Gestalt.

Man kann sodann im allgemeinen zwischen den vier Relationen entweder x_2, y_2, z_2 oder x_1, y_1, z_1 eliminiren.

In dem ersten Falle stellt die dadurch entstandene reelle Gleichung in x_1, y_1, z_1 die reelle Fläche der Mittelpunkte der imaginären Punkte, welche der Raumcurve angehören, dar.

Ist die Raumcurve eine reelle Ebene, so ist diese Fläche die Ebene der Curve.

In dem zweiten Falle wird eine Gleichung in x_2, y_2, z_2 erhalten, welche eine Fläche darstellt derart, dass die sämtlichen nach den Punkten dieser Fläche von dem Anfangspunkte aus gezogenen Vektoren Normalen der zur Raumcurve gehörigen imaginären Punkte sein können. Wir wollen diesen Ort die reelle Fläche der coinitialen Normalen der imaginären Punkte nennen.

Zu jedem Mittelpunkte eines imaginären Punktes oder zu jedem Wertsysteme für x_1, y_1, z_1 gehören im allgemeinen eine bestimmte Anzahl Wertsysteme für x_2, y_2, z_2 d. h. auch eine bestimmte Anzahl Normalen des imaginären Punktes. Die Punkte, welche auf den beiden soeben definirten Flächen diesen Wertsystemen entsprechen, wollen wir als correspondirende Punkte der beiden Flächen betrachten. Jede willkürlich gewählte Raumcurve bestimmt in dieser Weise im allgemeinen eine Correspondenz der Punkte zweier reellen Flächen.

103. Die allgemeinen Betrachtungen der vorhergehenden Artikel wollen wir nun auf einige einfachen Fälle anwenden.

Wir werden nämlich zuerst die Lage der imaginären Punkte einer reellen Ebene untersuchen, und wollen dazu den Quaternionencalcül vorzugsweise verwenden.

Die Gleichung der Ebene sei

$$S(\rho - \alpha)\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 26)$$

wo α, β zwei reelle Vektoren bedeuten.

Setzen wir nun

$$\rho = \rho_1 + \sqrt{-1}\,\rho_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 27)$$

so ergibt die Substitution in die vorhergehende Gleichung

$$S(\rho_1 - \alpha)\beta = 0 \ \text{ und } \ S\rho_2\beta = 0 \ \ldots\ldots, \quad (d.\ 28)$$

Die erste dieser Relationen sagt aus, dass die Mittelpunkte sämtlicher imaginären Punkte der Ebene in derselben enthalten sein müssen.

Nach der zweiten ist die Normale zur Ebene senkrecht zu den Normalen der imaginären Punkte. Diese letzeren sind somit der gegebenen Ebene parallel und die Ebenen der imaginären Punkte sind senkrecht zur gegebenen Ebene. Man erhält daher den Satz:

Die imaginären Punkte einer reellen Ebene sind Kreise, deren Mittelpunkte in derselben enthalten sind, während die Ebenen der imaginären Punkte senkrecht zur gegebenen Ebene sind und der Radius willkürlich gewählt werden kann.

Bei einer reellen Geraden

$$V(\rho - \alpha)\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 29)$$

ergibt die Substitution (*d.* 27) das System

$$V(\rho_1 - \alpha)\beta = 0 \ \text{ und } \ V\rho_2\beta = 0 \ \ldots\ldots \quad (d.\ 30)$$

Die beiden nach dem vorhergehenden Artikel zu einer Raumcurve in Beziehung stehenden Flächen bestehen bei einer Geraden nicht. Die Mittelpunkte der imaginären Punkte sind nach (*d.* 30) die reellen Punkte der Geraden und die Normalen der imaginären Punkte fallen der Richtung nach mit der gegebenen Geraden zusammen, während die Länge derselben willkürlich bleibt. Wir schlieszen hieraus:

Die imaginären Punkte einer reellen Geraden sind Kreise mit willkürlichen Radien um die Punkte der Geraden als Mittelpunkte in Ebenen senkrecht zur gegebenen Geraden beschrieben.

Noch wollen wir die Lage der imaginären Punkte einer reellen Kugel untersuchen. Dieselbe sei

$$T(\rho - \alpha) = T\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d. 31)$$

Die Substitution (*d.* 27) ergibt nach der Trennung der reellen und der imaginären Teile

$$N(\rho_1 - \alpha) = N\rho_2 + N\beta \text{ und } S(\rho_1 - \alpha)\,\rho_2 = 0 \; . \quad (d. 32)$$

Die erste dieser Gleichungen spricht aus, dass die Länge der Normale des imaginären Punktes der Länge der Tangente gleich ist, welche von dem Mittelpunkte des imaginären Punktes aus an die Kugel geht. Zugleich sagt jene Gleichung, dass der Mittelpunkt des imaginären Punktes auszerhalb der Kugel liegt.

Die zweite Gleichung besagt weiter, dass die Richtung der Normale des imaginären Punktes zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Kugel und des imaginären Punktes senkrecht ist, dass somit die Ebene des imaginären Punktes jene Verbindungsgerade enthält.

104. Ein Paar Beispiele der allgemeinen Flächen wollen wir hinzufügen, obgleich wir nur einige wenige Resultate im Grundriss herleiten wollen.

Es wird nämlich augenscheinlich durch die auseinandergesetzte Theorie ein ausgedehntes Gebiet für neue Untersuchungen geöffnet, auf das weiter einzugehen, wir für jetzt verzichten müssen.

Die allgemeine Ebene sei durch das System der Gleichungen

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d. 33)$$

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d.\,34)$$

in denen α, β, γ reelle Vektoren sind, x, y, z, a, b, c, d, ρ aber complexe Gröszen bedeuten können, definirt.

Wenn die Gleichung ($d.$ 33) *durch* $V\beta\gamma$ multiplicirt und an die dadurch erhaltene Gleichung mit dem Symbol S operirt wird, so ergibt sich

$$x = \frac{S\rho\beta\gamma}{S\alpha\beta\gamma}$$

und in gleicher Weise entsteht

$$y = \frac{S\rho\gamma\alpha}{S\alpha\beta\gamma}, \quad z = \frac{S\rho\alpha\beta}{S\alpha\beta\gamma}.$$

Diese Ausdrücke können in ($d.$ 34) substituirt werden. Das Resultat lautet

$$S\left[\rho\,(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta) + d\alpha\beta\gamma\right] = 0$$

oder

$$S\left(\rho + \frac{dS\alpha\beta\gamma}{a\,V\beta\gamma + b\,V\gamma\alpha + c\,V\alpha\beta}\right)(a\,V\beta\gamma + b\,V\gamma\alpha + c\,V\alpha\beta) = 0.$$

Hierbei sei bemerkt, dass im allgemeinen

$$a\,V\beta\gamma + b\,V\gamma\alpha + c\,V\alpha\beta \quad \text{und} \quad \frac{-\,dS\alpha\beta\gamma}{a\,V\beta\gamma + b\,V\gamma\alpha + c\,V\alpha\beta}$$

Vektorkegel sein werden. Setzen wir anstatt dieser Gröszen die einfachen Symbole μ, λ so ist dargetan, dass die Gleichung der allgemeinen Ebene stets in die Form

$$S(\rho - \lambda)\,\mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\,35)$$

gebracht werden kann, wo nun ρ, λ, μ im allgemeinen Vektorkegel bedeuten.

Es sei nun weiter

$$\rho = \rho_1 + \sqrt{-1}\,\rho_2, \quad \lambda = \lambda_1 + \sqrt{-1}\,\lambda_2, \quad \mu = \mu_1 + \sqrt{-1}\,\mu_1 \quad (d.\,36)$$

gesetzt, so ergibt sich aus ($d.$ 35) das System

$$\left.\begin{array}{l} S(\rho_1 - \lambda_1)\,\mu_1 = S(\rho_2 - \lambda_2)\,\mu_2 \\ \text{und} \\ S(\rho_1 - \lambda_1)\,\mu_2 = -\,S(\rho_2 - \lambda_2)\,\mu_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (d.\,37)$$

und eine einfachere Gestalt kann diesen Relationen noch erteilt werden durch die Einführung der Gröszen σ_1, σ_2 mittelst der Gleichungen

$$\rho_1 - \lambda_1 = \sigma_1, \quad \rho_2 - \lambda_2 = \sigma_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d.\,38)$$

Man erhält dadurch nämlich

$$S\sigma_1\mu_1 = S\sigma_2\mu_2 \text{ und } S\sigma_1\mu_2 = - S\sigma_2\mu_1 \quad \ldots \quad (d. 39)$$

Aus der Form dieser Gleichungen entnehmen wir, dass denselben genügt wird durch die Annahme

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 = x\mu_1 V\mu_1\mu_2 + y\mu_2 V\mu_1\mu_2 + zV\mu_1\mu_2 \\ \sigma_2 = -y\mu_1 V\mu_1\mu_2 + x\mu_2 V\mu_1\mu_2 + uV\mu_1\mu_2 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (d. 40)$$

wo x, y, z, u reelle aber beliebige Skalare bedeuten.

Diese Werte sagen aus, dass die Punkte σ_1, σ_2 auf die Ebene durch μ_1, μ_2 gebracht in die Punkte

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1 = x\mu_1 V\mu_1\mu_2 + y\mu_2 V\mu_1\mu_2 \\ \tau_2 = - y\mu_1 V\mu_1\mu_2 + x\mu_2 V\mu_1\mu_2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (d. 41)$$

projicirt werden.

Führen wir zwei neue Vektoren ν_1, ν_2 ein, welche aus μ_1, μ_2 dadurch erhalten werden, dass man die letzeren in ihrer Ebene um einen rechten Winkel drehen lässt, sodass

$$\nu_1 = \mu_1 UV\mu_1\mu_2 \, , \quad \nu_2 = \mu_2 UV\mu_1\mu_2$$

gesetzt werden kann und nehmen wir weiter

$$xTV\mu_1\mu_2 = x_1 \, , \quad yTV\mu_1\mu_2 = y_1 \, ,$$

so gehen die Gleichungen ($d.$ 41) über in die nachstehenden

$$\tau_1 = x_1\nu_1 + y_1\nu_2 \, , \quad \tau_2 = - y_1\nu_1 + x_1\nu_2 \quad \ldots \quad (d. 42)$$

wo nun x_1, y_1 beliebig gewählt werden können.

In der Figur 58a sind die beiden Vektoren ν_1, ν_2 gezeichnet,

$$ON_1 = \nu_1 \text{ und } ON_2 = \nu_2.$$

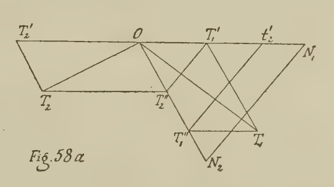


Fig. 58a

Wenn $OT_1 = \tau_1$ nach diesen Richtungen zerlegt wird, so sind die Componenten

$$OT'_1 = x_1\nu_1 \, , \quad OT''_1 = y_1\nu_2.$$

In gleicher Weise ist für $OT_2 = \tau_2$

$$OT'_2 = - y_1\nu_1 \, , \quad OT''_2 = x_1\nu_2$$

Nimmt man

$$Ot'_2 = - OT_2' = y_1 \nu_1$$

so ist

$$\frac{T.Ot_2'}{T.OT_1''} = \frac{T\nu_1}{T\nu_2} = \frac{T.OT_1'}{T.OT_2''}.$$

Es kann hieraus geschlossen werden, dass

$$t_2{'}T_1{''} \,//\, N_1N_2 \,//\, T_1{'}T_2{''}$$

und hierdurch erhalten wir eine einfache Construction für die correspondirenden Punkte T_1, T_2, wenn einer derselben, z. B. T_1 gegeben ist.

Zerlegen wir nämlich den Vektor OT_1 nach den Richtungen der Vektoren ν_1, ν_2, wodurch die Punkte $T_1{'}$, $T_1{''}$ erhalten werden und ziehen wir die Geraden $T_1{'}\,T_2{''}$ und $T_1{''}\,t_2{'}$ beide parallel zu N_1N_2; nehmen wir weiter $OT_2{'} = Ot_2{'}$ und bilden den Vektor, dessen Componenten $OT_2{'}$, $OT_2{''}$ sind, so ist dessen Endpunkt der gesuchte Punkt T_2.

Sind also τ_1, τ_2 gefunden, so sind auch ρ_1, ρ_2 leicht anzugeben. Es ist nämlich

$$\rho_1 = \lambda_1 + \tau_1 + z\,V\mu_1\mu_2\,,\quad \rho_2 = \lambda_2 + \tau_2 + u\,V\mu_1\mu_2$$

wo z und u beliebige reelle Werte beigelegt werden können.

Bei jedem willkürlich gewählten Mittelpunkte des imaginären Punktes gehören daher im allgemeinen eine unendliche Anzahl Normalen, deren Endpunkte zusammen eine reelle Gerade im Raume, senkrecht zur Ebene der Vektoren μ_1, μ_2 bestimmen.

Wenn der Mittelpunkt des imaginären Punktes sich längs der Geraden senkrecht zu jener Ebene bewegt, so ändert sich die von den Endpunkten der Normalen beschriebene Gerade — daher auch die dem Mittelpunkte zugehörigen Normalen — nicht.

Die einem willkürlich gewählten Mittelpunkte ρ_1 zugehörige Gerade der Normalen zu bestimmen, construire man aus jenem Punkte den Vektor $-\lambda_1$ und projicire dessen Endpunkt auf die Ebene der Vektoren μ_1, μ_2. Zum so erhaltenen Punkte T_1 werde nach der Figur 58*a* der correspondirende Punkt T_2 construirt, und aus diesem werde der Vektor λ_2 abgetragen. Die Senkrechte, aus dessen Endpunkt auf die Ebene von μ_1 und μ_2 gefällt, ist die Gerade, dessen Punkte Vektoren haben, welche als Normalen für den gewählten Mittelpunkt genommen werden können.

Die Bearbeitung besonderer Fälle kann hier keinen Platz finden.

105. Wenn auszer (*d.* 38) zwei lineare Relationen zwischen x, y, z gegeben sind, so haben wir es mit einer allgemeinen Geraden zu tun.

Wir nehmen hierbei an, dass die linearen Gleichungen sind

$$ax + by + cz + 1 = 0\,,\; a'x + b'y + c'z + 1 = 0 \quad . \; . \; (d.\,43)$$

Setzt man nun in diese Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= (bc' - b'c)\,u - (b' - c' - b + c)\,\triangle \\ y &= (ca' - c'a)\,u - (c' - a' - c + a)\,\triangle \\ z &= (ab' - a'b)\,u - (a' - b' - a + b)\,\triangle \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (d.\,44)$$

wo u ein neuer complexer Skalar und

$$\frac{1}{\triangle} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

genommen ist, so wird den beiden Gleichungen (*d.* 43) genügt und die Gleichung (*d.* 33) wird zur nachstehenden

$$\begin{aligned} \rho = \triangle\,[\alpha(b-c-b'+c') + \beta(c-a-c'+a') + \gamma(a-b-a'+b')] \\ + u\,[\alpha(bc'-b'c) + \beta(ca'-c'a) + \gamma(ab'-a'b)]\,, \end{aligned}$$

eine Gleichung von der Form der Gleichungen (*d.* 4*), welche wir auf eine reelle Gerade anwendbar fanden. Wir können deshalb sagen, die Gleichung

$$\rho = \alpha + x\beta \text{ oder } V(\rho - \alpha)\,\beta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,45)$$

stelle eine allgemeine Gerade dar, wenn nur unter ρ, α, β Vektorkegel und unter x ein complexer Skalar verstanden werden.

Setzen wir nun noch für jede Grösze p den Ausdruck $p_1 + \sqrt{-1}\,p_2$, so ergibt sich aus (*d.* 45) das System

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 + x_1\beta_1 - x_2\beta_2 \\ \rho_2 &= \alpha_2 + x_2\beta_1 + x_1\beta_2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,46)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lässt sich nun leicht eine geometrische Veranschaulichung der allgemeinen Geraden erhalten.

Die beiden Gleichungen sagen nämlich aus, dass die Endpunkte der Vektoren ρ_1, ρ_2 jeder für sich eine reelle Ebene senkrecht zum Vektor $V\beta_1\beta_2$ beschreiben. Diese Ebenen sind daher parallel und sie enthalten die Endpunkte der gegebenen Vektoren α_1, α_2 bzhw.

Mit Hülfe der Figur 58*a* ist es ein Leichtes zwei correspondirende Vektoren

$$x_1\beta_1 - x_2\beta_2, \ x_2\beta_1 + x_1\beta_2$$

zu finden. Dieselben werden von den Endpunkten der Vektoren α_1, α_2 bzhw. abgetragen, wodurch zwei correspondirende Werte von ρ_1 und ρ_2 gefunden sind.

Wir fanden aus (d. 46), dass die Mittelpunkte sämtlicher imaginären Punkte einer allgemeinen Geraden in einer reellen Ebene enthalten sind. Es ist dieses Ergebnis in Übereinstimmung mit der von Hrn TARRY in seiner Abhandlung zur allgemeinen Geometrie für die Gerade aufgestellte Definition. Im Übrigen treffen aber meine Ergebnisse nicht mit dieser Definition zusammen, wie eine Rechnung zeigt, welche der nachfolgenden analog ist. Ich will noch dartun, dass dies nur darin seine Begründung findet, dass Hr TARRY seine Betrachtungen auf Punkte in einer Ebene beschränkt, während ich stets Figuren im Raume der Rechnung unterzog. Im nächsten Artikel, wo ich diese Allgemeinheit fallen lasse, werde ich wirklich auf die Definition der Geraden des Hrn TARRY anlangen.

105*. Wir setzen daher, um zu einer Geraden, zu geraten

$$\left.\begin{array}{l}\rho = x\alpha + y\beta \\ ax + by + c = 0\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (d.\,47)$$

wo x, y, a, b, c complexe Skalare, α, β reelle Vektoren bedeuten.

Führen wir weiter ein

$$x = bu - \frac{c}{a+b}, \ y = -au - \frac{c}{a+b} \quad \ldots\ldots (d.\,48)$$

wo u ein neuer variabler complexer Skalar ist, so wird (d. 47) übergehen in

$$\rho = -\frac{c}{a+b}(\alpha + \beta) + (b\alpha - a\beta)u$$

oder

$$\rho = a\lambda + u\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d.\,49)$$

u bedeutet hierin einen complexen Skalar, μ einen complexen Vektor $\mu_1 + \sqrt{-1}\,\mu_2$, bei welchem die reellen Vektoren μ_1, μ_2 mit dem reellen Vektor λ in derselben Ebene enthalten sind. Ist noch

$$a = a_1 + \sqrt{-1}\,a_2$$
$$u = u_1 + \sqrt{-1}\,u_2$$

so folgt aus (*d.* 49)

$$\rho_1 = a_1\lambda + u_1\mu_1 - u_2\mu_2,$$
$$\rho_2 = a_2\lambda + u_2\mu_1 + u_1\mu_2.$$

Herr Tarry wählt nun als geometrische Darstellung des imaginären Punktes das Punktepaar, welches erhalten wird, wenn man den Vektor ρ_2 um den Endpunkt des Vektors ρ_1 in seiner Ebene um einen rechten Winkel nach beiden Seiten hin dreht.

Es ist dieses Punktepaar bestimmt durch

$$\rho_1 \pm \rho_2\,\varepsilon$$

wenn ε statt $UV\mu_1\mu_2$, des rechten Radials in der Ebene von μ_1, μ_2 gesetzt wird. Statt dieses Ausdrucks kann auch geschrieben werden

$$\lambda\,(a_1 \pm a_2\varepsilon) + u_1\,(\mu_1 \pm \mu_2\,\varepsilon) - u_2\,(\mu_2 \mp \mu_1\varepsilon).$$

Nun ist jedoch

$$\mu_2 - \mu_1\varepsilon = -(\mu_1 + \mu_2\varepsilon)\varepsilon$$
$$\mu_2 + \mu_1\varepsilon = (\mu_1 - \mu_2\varepsilon)\varepsilon.$$

Somit können die beiden Vektoren des Punktepaares in die Form gebracht werden

$$\alpha + \beta\,(u_1 + u_2\varepsilon)\,,\quad \alpha_1 + \beta_1\,(u_1 - u_2\varepsilon)\,,$$

wenn der Kürze halber

$$\alpha = \lambda\,(a_1 + a_2\varepsilon),\quad \beta = \mu_1 + \mu_2\varepsilon$$
$$\alpha_1 = \lambda\,(a_1 - a_2\varepsilon),\quad \beta_1 = \mu_1 - \mu_2\varepsilon$$

gesetzt wird.

Zwei denselben Werten von u_1, u_2 entsprechende Punkte, welche zusammen ein oben verzeichnetes Punktepaar bilden, wollen wir homologe Punkte nennen.

Für $u_1 = u_2 = 0$ erhält man zwei derartige Punkte, welche wir mit P', P'' bezeichnen wollen. Sind P_1', P_1'' und P_2', P_2'' zwei andere Paare homologer Punkte, welche den Werten u_1', u_2'; u_1'', u_2'' für u_1, u_2 entsprechen, so können die Vektoren $P'P_1'$, $P'P_2'$, $P'P_1''$, $P'P_2''$ leicht hingeschrieben werden. Man findet sodann

$$P'P_1' = \beta\,(u_1' + u_2'\varepsilon)\,,\quad P''P_1'' = \beta_1\,(u_1' - u_2'\varepsilon)$$
$$P'P_2' = \beta\,(u_1'' + u_2''\varepsilon)\,,\quad P''P_2'' = \beta_1\,(u_1'' - u_2''\varepsilon).$$

Daher

$$\frac{P'P_1'}{P'P_2'} = \frac{\beta\,(u_1' + u_2'\varepsilon)}{\beta\,(u_1'' + u_2''\varepsilon)} = \frac{(u_1' - u_2'\varepsilon)\,\beta}{(u_1'' - u_2''\varepsilon)\,\beta}, \text{ weil } S\varepsilon\beta = 0$$

$$= \frac{u_1' - u_2'\varepsilon}{u_1'' - u_2''\varepsilon} \text{ nach } (b.\ 73^*)$$

und in derselben Weise

$$\frac{P''P_1''}{P''P_2''} = \frac{u_1' + u_2'\varepsilon}{u_1'' + u_2''\varepsilon}.$$

Nun ist aber nach vorhergehenden Formeln und weil

$$u_1' - u_2'\varepsilon,\ u_1'' - u_2''\varepsilon$$

complanar sind

$$K\frac{u_1' + u_2'\varepsilon}{u_1'' + u_2''\varepsilon} = \frac{1}{K(u_1'' + u_2''\varepsilon)}\,K(u_1' + u_2'\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{u_1'' - u_2''\varepsilon}\,(u_1' - u_2'\varepsilon) = \frac{u_1' - u_2'\varepsilon}{u_1'' - u_2''\varepsilon}$$

somit ist auch

$$\frac{P''P_1''}{P''P_2''} = K\frac{P'P_1'}{P'P_2'}$$

und diese Gleichung spricht, wie leicht ersichtlich, aus, dass die homologen Punkte zwei invers ähnlichen Figuren angehören.

Wir haben jetzt gezeigt, dass wir für den Fall, wo nur Vektoren in einer Ebene betrachtet werden, auf die Definition des Hrn Tarry zurückkommen.

Ein zweiter von Hrn Tarry in seiner Abhandlung bewiesener Satz ergibt sich wie nachstehend:

Ein willkürlicher Punkt der Verbindungsgerade zweier homologen Punkte hat den Vektor

$$\rho = \frac{\alpha + \beta\,(u_1 + u_2\varepsilon) + x\,[\alpha_1 + \beta_1\,(u_1 - u_2\varepsilon)]}{1 + x}.$$

Beachtet man, dass

$$\beta\varepsilon = \beta\,UV\beta\beta_1 = \frac{\beta^2\beta_1 - \beta S\beta\beta_1}{TV\beta\beta_1}$$

$$\beta_1\varepsilon = \beta_1\,UV\beta\beta_1 = \frac{-\beta_1^2\beta + \beta_1 S\beta\beta_1}{TV\beta\beta_1}$$

so kann man auch schreiben

$$\rho = \alpha + x\alpha_1 + \beta\left[u_1 - u_2\frac{S\beta\beta_1 - x\beta_1^2}{TV\beta\beta_1}\right] + x\beta_1\left[u_1 - u_2\frac{S\beta\beta_1 - \beta^2 x^{-1}}{TV\beta\beta_1}\right]$$

und durch die Annahme

$$x\beta_1^2 = x^{-1}\beta^2 \text{ oder } x = \pm\frac{T\beta}{T\beta_1}$$

geht dieser Wert über in

$$\rho = \alpha \pm \alpha_1 T\frac{\beta}{\beta_1} + v\left(\beta \pm \beta_1 T\frac{\beta}{\beta_1}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\, 50)$$

wo der neue veränderliche Skalar v statt der Grösze

$$u_1 - u_2\frac{S\beta\beta_1 \mp T\beta\beta_1}{TV\beta\beta_1}$$

gesetzt ist. Es erhellt hieraus, dass der Ort des Punktes ρ eine reelle Gerade ist. Dies ist der von Hrn Tarry bewiesene Satz:

Wenn man die Strecke zwischen je zwei homologen Punkten in einem bestimmten constanten Verhältnis teilt, so liegen die Teilpunkte auf einer reellen Geraden.

Das Verhältnis x ist zugleich das Verhältnis der Längen zweier homologen Strecken der ähnlichen Figuren. Denn zwei homologe Strecken sind allgemein

$$\beta\,[u_1' - u_1'' + (u_2' - u_2'')\varepsilon],\ \beta_1\,[u_1' - u_1'' - (u_2' - u_2'')\varepsilon]$$

und die Längen derselben, mit zwei potenzirt, sind

$$N\beta\, N[u_1' - u_1'' + (u_2' - u_2'')\varepsilon] = N\beta\,[(u_1' - u_1'')^2 + (u_2' - u_2'')^2]$$

und

$$N\beta_1 N[u_1' - u_1'' - (u_2' - u_2'')\varepsilon] = N\beta_1[(u_1 - u_1'')^2 + (u_2' - u_2'')^2].$$

In ($d.$ 50) sind zwei Geraden enthalten, welche zu einander senkrecht sind, weil

$$S.(\beta T\beta_1 + \beta_1 T\beta)\,(\beta T\beta_1 - \beta_1 T\beta) = 0.$$

Es entsprechen diese beiden Örter den beiden Fällen, wo der Teilpunkt der Strecke zwischen zwei homologen Punkten auf der Strecke selbst oder auf deren Verlängerung gewählt worden ist.

106. Die Gleichungen

$$\rho = \alpha \pm \sqrt{-1}\, a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\, 51)$$

wo a ein bestimmter arithmetischer Skalar ist, stellen eine Kugel dar, mit dem Radius a um den Endpunkt des Vektors α als Mittelpunkt beschrieben. Denn die Quadrirung dieser Gleichungen ergibt

$$(\rho - \alpha)^2 = - a^2 \text{ oder } T(\rho - \alpha)^2 = a^2$$

somit

$$T(\rho - \alpha) = a$$

und es gehört diese Gleichung einer Kugel an.

In dem besonderen Falle $\alpha = 0$ und $a = 1$, erhält man somit

$$\rho = \sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d. 52)$$

als die Gleichung einer Einheitskugel.

Die Vieldeutigkeit des Symbols $\sqrt{-1}$ tritt hier besonders deutlich zu Tage, wie auch schon von HAMILTON erkannt worden ist. Es wird nämlich unmittelbar einleuchten, dass in der zweiten Seite der Gleichung ($d.$ 52) $\sqrt{-1}$ jeden willkürlichen Einheitsvektor, aus dem Vektorenanfangspunkte gezogen, darstellt und diese Einheitsvektoren können sodann auch als die Indices rechter Radiale aufgefasst werden, wodurch wir auf der im ersten Abschnitt angegebenen Deutung des Symbols $\sqrt{-1}$ aufs neue angelangt sind.

107. Im Anschluss an den vorhergehenden Artikel mag hier bemerkt werden, dass die bisher angenommene Deutung der Grösze $\sqrt{-1}\,\alpha$ eine Erweiterung zulässt.

Wir sahen in jenem Artikel nämlich, dass in dem Symbole $\sqrt{-1}$ alle möglichen rechten Quotienten enthalten sind, während bei der Deutung des Ausdrucks $\sqrt{-1}\,\alpha$ nur diejenigen rechten Quotienten gewählt sind, welche die Ebene des Vektors α enthalten. Man kann nun aber auch die nachstehende Definition wählen:

Unter $\sqrt{-1}\,\alpha$ sei verstanden die Gesamtheit der Quaternionen, welche erhalten werden durch die Multiplikation des rechten Quotienten α *mit* einem jeden der in dem Symbole $\sqrt{-1}$ enthaltenen rechten Radiale.

Diese Definition ergibt, dass in dem Zeichen $\sqrt{-1}\,\alpha$ nicht nur eine unendliche Anzahl willkürlicher Quaternionen sondern auch eine derartige Anzahl rechter Quotienten enthalten sind, deren Indices sämtlich senkrecht zum Vektor α sind. Diese Indices bilden sodann den im ersten Abschnitt unter $\sqrt{-1}\,\alpha$ verstandenen Vektorkreis.

108. Betrachten wir weiter die Gleichung

$$\left(S\frac{\rho-\alpha}{\beta}\right)^2-\left(V\frac{\rho-\alpha}{\gamma}\right)^2=1 \quad \ldots\ldots \quad (d.\,53)$$

Wir wollen zeigen, dass dieselbe einem Ellipsoid angehört.

Wenn nämlich δ und ε zwei willkürliche Vektoren sind, so ist

$$\rho=\frac{\delta+u\varepsilon}{1+u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\,54)$$

bei veränderlichem u eine willkürliche Gerade, und wir erhalten die Vektoren der Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Gebilde ($d.$ 53), indem wir den Wert von ρ, aus ($d.$ 54) in ($d.$ 53) einführen und die zugehörigen Werte von u bestimmen. Man erhält dadurch

$$\left[S\frac{\delta-\alpha}{\beta}+uS\frac{\varepsilon-\alpha}{\beta}\right]^2-\left[V\frac{\delta-\alpha}{\gamma}+uV\frac{\varepsilon-\alpha}{\gamma}\right]^2=(1+u)^2,$$

somit eine Gleichung zweiten Grades für u.

Eine willkürliche Gerade schneidet demnach die Oberfläche ($d.$ 53) in zwei Punkten; dieselbe ist deshalb zweiten Grades.

Statt

$$\left(S\frac{\rho-\alpha}{\beta}\right)^2$$

können wir setzen

$$NS\frac{\rho-\alpha}{\beta};$$

statt

$$\left(V\frac{\rho-\alpha}{\gamma}\right)^2 \text{ ebenso } -NV\frac{\rho-\alpha}{\gamma}.$$

Nach ($d.$ 53) wird deshalb

$$NS\frac{\rho-\alpha}{\beta}+NV\frac{\rho-\alpha}{\gamma}=1, \text{ oder } N\left(S\frac{\rho-\alpha}{\beta}+V\frac{\rho-\alpha}{\gamma}\right)=1,$$

denn wenn man in ($b.$ 116) q durch Vq ersetzt, so wird:

$$N(Vq+x)=NVq+x^2=NVq+Nx.$$

Es wird nun auch

$$T\left(S\frac{\rho-\alpha}{\beta}+V\frac{\rho-\alpha}{\gamma}\right) \text{ oder } T(\rho-\alpha)T\left(S\frac{U(\rho-\alpha)}{\beta}+V\frac{U(\rho-\alpha)}{\gamma}\right)=1$$

sein müssen, und demnach kann $T(\rho-\alpha)$ niemals unendlich werden, es sei denn dass

$$S\frac{U(\rho-\alpha)}{\beta}+V\frac{U(\rho-\alpha)}{\gamma}=0\quad.$$

wäre, eine Gleichung, welche nur stattfinden könnte, wenn jedes der Glieder der ersten Seite verschwände, und dies würde erfordern, dass der Vektor $\rho-\alpha\perp\beta$ und $/\!/\gamma$ wäre; eine Voraussetzung, die bei willkürlicher Wahl der Vektoren β, γ unmöglich ist.

Die einzige Oberfläche zweiten Grades, welche dieser Bedingung genügt, ist das Ellipsoid.

Der Endpunkt des Vektors α ist der Mittelpunkt der Oberfläche; denn die Vektoren $\alpha-\sigma$, $\alpha+\sigma$ müssen stets zugleich der Gleichnng (*d*. 53) genügen.

Wenn $\gamma=\beta$, so geht das Ellipsoid in eine Kugel über.

109. Bei Benutzung der Relation (*b*. 116) kann die Gleichung des Ellipsoids leicht in eine andre Gestalt erhalten werden. Nach jener Gleichung ist nämlich

$$N\left(S\frac{\rho}{\alpha}+V\frac{\rho}{\beta}\right)=\left(S\frac{\rho}{\alpha}\right)^2+NV\frac{\rho}{\beta}=\left(S\frac{\rho}{\alpha}\right)^2-\left(V\frac{\rho}{\beta}\right)^2$$

und das Ellipsoid kann somit auch durch die Gleichung

$$T\left(S\frac{\rho}{\alpha}+V\frac{\rho}{\beta}\right)=1\quad\ldots\ldots\ldots\quad(d.\,55)$$

dargestellt werden.

Führen wir weiter statt der Vektoren α, β zwei andre mittelst der Gleichungen

$$\gamma=\frac{2\beta}{\beta+\alpha}\,\alpha,\quad\delta=\frac{2\beta}{\beta-\alpha}\,\alpha\quad\ldots\ldots\ldots\quad(d.\,56)$$

ein. Aus der ersten dieser Gleichungen lässt sich folgern

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{2\beta}{\beta+\alpha}\ \text{ und hieraus }\ \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta+\alpha}{2\beta}=\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2\beta}$$

oder

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right),$$

sodass allgemein erhalten wird

$$\frac{\rho}{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\alpha}+\frac{\rho}{\beta}\right)$$

und in gleicher Weise

$$\frac{\rho}{\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\alpha} - \frac{\rho}{\beta}\right).$$

Somit ist weiter

$$\frac{\rho}{\gamma} + K\frac{\rho}{\delta} = \tfrac{1}{2}(1+K)\frac{\rho}{\alpha} + \tfrac{1}{2}(1-K)\frac{\rho}{\beta} = S\frac{\rho}{\alpha} + V\frac{\rho}{\beta}$$

und die Gleichung (d. 55) geht hiermit über in die nachstehende

$$T\left(\frac{\rho}{\gamma} + K\frac{\rho}{\delta}\right) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 57)$$

Es ist dies eine neue Form der Gleichung des Ellipsoids. Eine andre Schreibweise für dieselbe ist

$$T(\rho\gamma^{-1} + K\rho\delta^{-1}) = 1 \text{ oder nach } (c.\ 13)\ T(\rho\gamma^{-1} + \delta^{-1}\rho) = 1 \quad (d.\ 58)$$

Schlieszlich können noch zwei neue Vektoren ι und $\varkappa$ mittelst der Gleichungen

$$\gamma^{-1} = \frac{\iota}{\varkappa^2 - \iota^2},\quad \delta^{-1} = \frac{\varkappa}{\varkappa^2 - \iota^2} \quad \ldots\ldots \quad (d.\ 59)$$

eingeführt werden, und dadurch erhalten wir die Gleichung des Ellipsoids in die Gestalt

$$T(\iota\rho + \rho\varkappa) = \varkappa^2 - \iota^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 60)$$

welche von HAMILTON bei verschiedenen Untersuchungen benutzt worden ist.

Es ist zu bemerken, dass die Vektoren ι, $\varkappa$ der Richtung nach mit γ, δ oder deren Negativen übereinstimmen; es kann dies unmittelbar aus (d. 59) geschlossen werden, und weiter noch, indem man diese Gleichungen quadrirt und die erhaltenen Resultate subtrahirt,

$$\varkappa^2 - \iota^2 = \frac{1}{\delta^{-2} - \gamma^{-2}} = \frac{\gamma^2\delta^2}{\gamma^2 - \delta^2}$$

Hiermit gehen dieselben Gleichungen über in die nachstehenden

$$\iota = \gamma\frac{\delta^2}{\gamma^2 - \delta^2},\quad \varkappa = \delta\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \delta^2} \quad \ldots\ldots \quad (d.\ 61)$$

Es kann hieraus geschlossen werden, dass ι, $\varkappa$ mit γ, δ bzhw. der Richtung nach zusammenfallen, wenn $T\gamma > T\delta$. Ist $T\gamma < T\delta$, so haben ι, $\varkappa$ zu γ, δ bzhw. entgegengesetzte Richtungen.

Wenn mann die Gleichung (d. 53) mit derjenigen einer Ebene

$$S(\rho - \delta)\,\varepsilon = 0$$

combinirt, so wird eine Ellipse erhalten. Eine specielle Wahl

der Vektoren δ, ε ergibt die Gleichung der Ellipse in einfacherer Gestalt.

110. Wir wollen noch zwei andere den vorhergehenden verwandte geometrische Örter in Betracht ziehen, nämlich

1⁰. $$SU\frac{\rho-\alpha}{\beta}=SU\frac{\gamma}{\delta} \qquad (d.\,62)$$

Wenn

$$OA=\alpha,\quad AB=\beta,\quad OP=\rho,\quad OC=\gamma,\quad OD=\delta,$$

so sagt diese Gleichung aus nach (*b.* 103), dass

$$\cos\angle PAB=\cos\angle COD \text{ oder } \angle PAB=\text{constant}.$$

Es stellt (*d.* 62) somit einen kreisförmigen Kegel dar, dessen Scheitel der Punkt A, dessen Achse der Vektor β, und dessen Scheitelwinkel $\angle$ COD ist.

Anstatt $SU\frac{\gamma}{\delta}$ kann in der zweiten Seite der Gleichung irgend eine zwischen -1, $+1$ liegende Constante gesetzt werden.

2⁰. $$TV\frac{\rho-\alpha}{\beta}=TV\frac{\gamma}{\delta} \qquad (d.\,63)$$

Beachtet man, dass nach (*b.* 126)

$$TV\frac{\rho-\alpha}{\beta}=T\frac{\rho-\alpha}{\beta}\sin\angle\frac{\rho-\alpha}{\beta}=\frac{T.AP}{T.OB}\sin\angle PAB$$

und dass $T.AP\sin\angle PAB$ das aus dem Punkte P auf die Gerade AB gefällte Lot ist, so sagt die Gleichung (*d.* 63) aus, dass dieses Lot constant ist.

Es ist diese Gleichung somit diejenige eines kreisförmigen Cylinders, dessen Achse mit AB zusammenfällt.

111. Zum Schlusze dieses Abschnittes seien noch einige andren Formen erwähnt, in welchen geometrische Örter erscheinen können. Es erfordert dieselbe aufs neue die Anwesenheit eines veränderlichen Skalars in der Gleichung und es schlieszt sich deshalb die hier bezeichnete Gestalt sehr enge derjenigen an, welche wir im ersten Abschnitt zu erörtern Gelegenheit fanden. Wir wollen dies an zwei Beispielen erläutern.

Es sei α ein willkürlicher Vektor, ε ein Einheitsvektor in irgend einer Ebene. α und ε können auch als rechter Quotient und Radial bzhw. betrachtet werden.

Der Quaternion ε^x, wo x ein Skalar bedeutet, ist nunmehr

ein Radial in der Ebene von ε, dessen Winkel $x\frac{\pi}{2}$ beträgt. Indem man x die Werte von 0 bis ∞ durchlaufen lässt, stellt somit ε^x einen veränderlichen Radial in der Ebene von ε dar.

Führen wir weiter die Bedingung

$$S\varepsilon\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 64)$$

ein, so wirken ε und ε^x in einer durch den Vektor α gehenden Ebene, weil die Ebene des Radials ε^x senkrecht zum Vektor ε ist, und nach ($d.$ 64) auch $\alpha \perp \varepsilon$. Somit wird das Symbol ε^x an den Vektor α operirend, demselben eine Drehung ohne Änderung der Länge erteilen in einer zum Vektor ε senkrechten Ebene. Daher kann auch unter der Bedingung ($d.$ 64)

$$\rho = \varepsilon^x\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 65)$$

bei veränderlichem x als die Gleichung eines Kreises gelten, mit dem Radius $T\alpha$ in einer zum Vektor ε senkrechten Ebene beschrieben.

In gleicher Weise kann eine Ellipse dargestellt werden durch die Gleichung ($d.$ 66) jedoch ohne die Bedingung ($d.$ 64)

$$\rho = V.\varepsilon^x\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 66)$$

Denn man kann diese Gleichung wie nachstehend umgestalten.

$$\rho = V.\left(\cos x\frac{\pi}{2} + \sin x\frac{\pi}{2}\,.\,\varepsilon\right)\alpha, \text{ nach } (c.\ 9) \text{ mit der Annahme } T\varepsilon = 1$$

$$= \alpha \cos x\frac{\pi}{2} + V\varepsilon\alpha\,.\,\sin x\frac{\pi}{2}$$

und dieser Ausdruck geht in die im Art. 24 für die Ellipse angegebene über, wenn gesetzt wird

$$\cos x\frac{\pi}{2} = u, \quad V\varepsilon\alpha = \beta.$$

Es ist somit ($d.$ 66) die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Vektorenanfang O ist, während α, $V\varepsilon\alpha$ conjugirte Durchmesser oder vielmehr, weil $\alpha \perp V\varepsilon\alpha$, die Achsen der Curve sind.

Wir wollen auch noch den durch die Gleichung

$$\rho = \alpha^t\beta\alpha^{-t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 67)$$

dargestellten geometrischen Ort, wo α, β willkürliche aber

constante coinitiale Vektoren, t einen variablen Skalar bedeuten, näher untersuchen.

Wir erhalten aus dieser Relation

$$T\rho = T\alpha^t T\beta\, T\alpha^{-t} = T\beta = \text{constant}.$$

Somit kann die durch (d. 67) dargestellte Curve auf einer Kugel mit dem Radius $T\beta$ beschrieben gedacht werden.

Weiter ist

$$S.\alpha\rho = S.\alpha^{t+1}\beta\alpha^{-t} = S.\alpha^{-t}\alpha^{t+1}\beta = S\alpha\beta = \text{constant}.$$

Mit dem vorhergehenden Resultate ergibt sich somit auch

$$\angle\, \alpha\rho = \text{constant} = \angle\, \alpha\beta.$$

Die Gleichung (d. 67) gehört somit dem Kreise an, welcher durch den Endpunkt des Vektors β beschrieben wird, wenn man denselben um α als Achse konisch drehen lässt.

Die Grösze des Drehungswinkels um diese Achse zu ermitteln sei $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OP = \rho$ gedacht. Es handelt sich sodann darum den Winkel zwischen den beiden Ebenen AOB, AOP zu bestimmen. Dieser Winkel kommt aber demjenigen zwischen den beiden Normalen zu jenen Ebenen, deren Richtungen durch die Symbole $V\alpha\beta$, $V\alpha\rho$ angegeben werden können, gleich. Wir müssen deshalb den Winkel des Quaternions

$$V\alpha\rho : V\alpha\beta$$

bestimmen. Erwägt man, dass

$$\alpha^t\beta\alpha^{-t} = \left(\cos t\frac{\pi}{2} + \sin t\frac{\pi}{2}.U\alpha\right)\beta\left(\cos t\frac{\pi}{2} - \sin t\frac{\pi}{2}.U\alpha\right)$$

$$= \beta\cos^2 t\frac{\pi}{2} - T\alpha^{-1}\sin t\pi\, V\alpha\beta - T\alpha^{-2}\sin^2 t\frac{\pi}{2}\,\alpha\beta\alpha,$$

während

$$S\alpha\beta\alpha = 0,$$

sodass

$$\alpha\beta\alpha = V\alpha\beta\alpha = 2\alpha S\alpha\beta - \beta\alpha^2 = 2\alpha S\alpha\beta + \beta T\alpha^2,$$

so wird weiter

$$\rho = \beta\cos^2 t\frac{\pi}{2} - T\alpha^{-1}\sin t\pi.\, V\alpha\beta - 2T\alpha^{-2}\sin^2 t\frac{\pi}{2}.\alpha S\alpha\beta - \beta\sin^2 t\frac{\pi}{2}$$

$$= \beta\cos t\pi - T\alpha^{-1}\sin t\pi.\, V\alpha\beta - 2T\alpha^{-2}\sin^2 t\frac{\pi}{2}.\,\alpha S\alpha\beta.$$

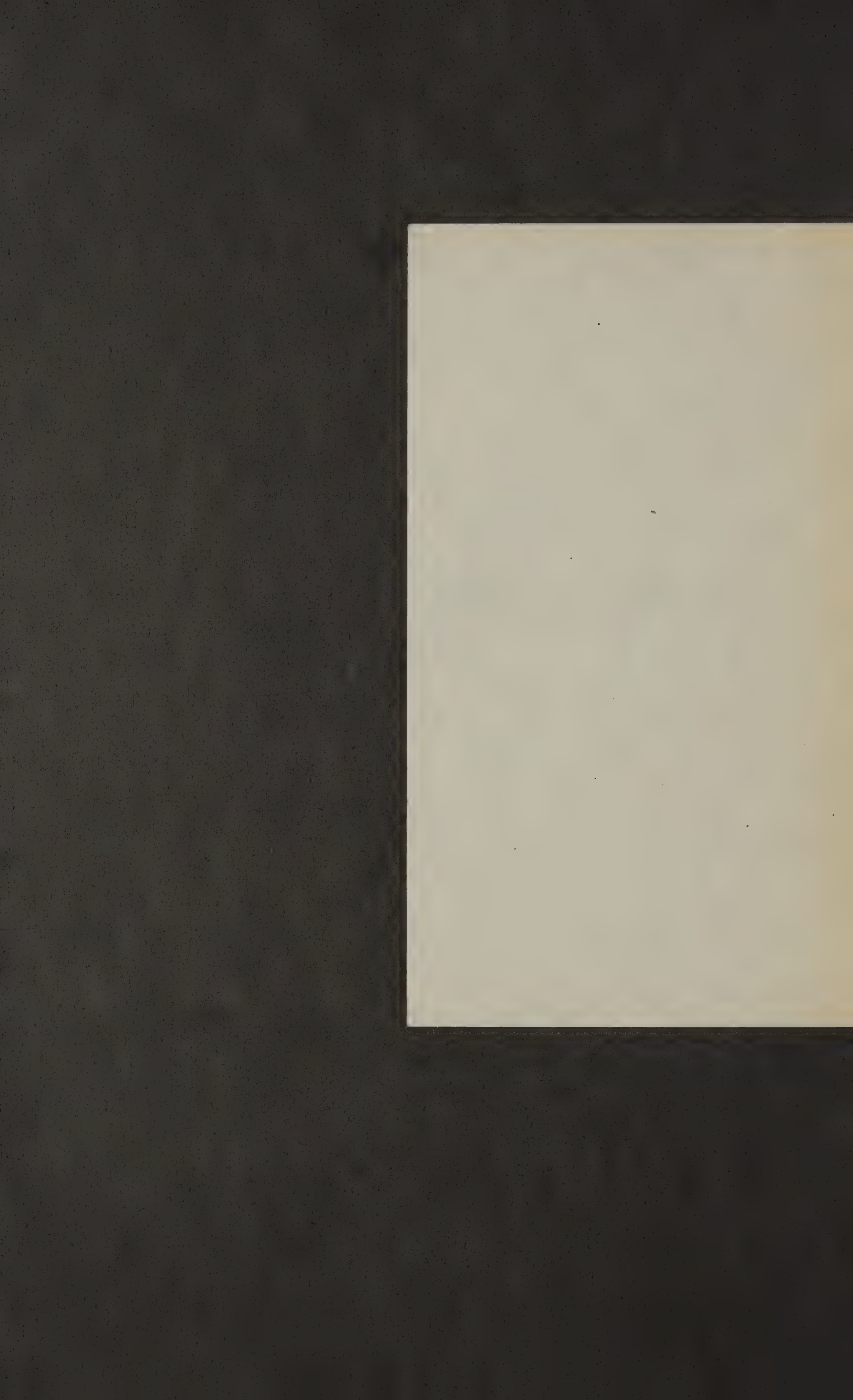
Und hieraus kann unmittelbar geschlossen werden:

$$V\alpha\rho = V\alpha\beta.\cos t\pi - \alpha\, V\alpha\beta\sin t\pi.T\alpha^{-1} = V\alpha\beta\cos t\pi - U\alpha.\, V\alpha\beta\sin t\pi.$$

$Ma\omega$

$Ia = ma^2\omega$

$2\pi a \; Ma\omega$



Somit ist

$$\frac{V\alpha\rho}{V\alpha\beta} = \cos t\pi - \sin t\pi . U\alpha$$

woraus erhellt, dass dieser Quaternion ein Versor ist, dessen Winkel $t\pi$ beträgt, während die Achse dem Vektor α entgegengesetzt ist.

Das Resultat dieser Untersuchung ergibt daher als Antwort auf die Frage nach der Grösze der Drehung des Vektors β um die Achse α den Winkel $t\pi$.

Dasselbe Ergebniss hätte man auch auf einfachere Weise erhalten können.

Denken wir uns nämlich den Vektor β in zwei andre β_1 und β_2 zerlegt, welche parallel und senkrecht bzhw. zum gegebenen Vektor α sein mögen. Es wird sodann

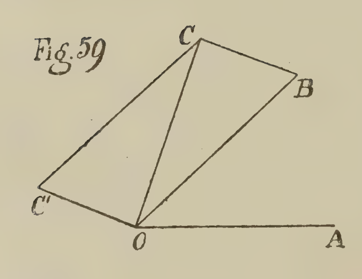
$$\rho = \alpha^t(\beta_1 + \beta_2)\alpha^{-t} = \alpha^t\alpha^{-t}\beta_1 + \alpha^t\beta_2\alpha^{-t}$$

Weil nämlich α^t, β_1, α^{-t} complanare Quaternionen sind, so können dieselben in dem Produkte des ersten Gliedes der letzten Seite umgetauscht werden. Weil aber $U\beta_2$, $U\alpha$ unter sich senkrecht sind, so kann bei dem zweiten Produkt die Gleichung (*c.* 11*) Anwendung finden. Somit ist

$$\rho = \beta_1 + T\beta_2\, U\alpha^t . U\beta_2\, U\alpha^{-t} = \beta_1 + T\beta_2\, U\alpha^t U\alpha^t U\beta_2 = \beta_1 + U\alpha^{2t}.\beta_2$$

Das letzte Glied dieser Gleichung ist ein Vektor, welcher aus β_2 einfach durch eine Drehung um einen Winkel $t\pi$ um α als Achse erhalten wird. Dieselbe Drehung hat sodann aber auch ρ um diese Achse erfahren.

DIFFERENTIALE VON QUATERNIONEN.



112. Wenn zwei Quaternionen $q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$, $q' = \mathrm{OC} : \mathrm{OA}$, auf denselben Nenner reducirt gegeben sind, so wollen wir die Differenz derselben

$$q' - q = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} - \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OC} - \mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OA}}$$

unter einem andern Gesichtspunkte ein Differential des Quaternions q nennen und mit dq bezeichnen.

Dieses Differential ist somit ein ganz willkürlicher Quaternion. Achse, Winkel und Tensor bleiben unbestimmt; es braucht der letzte, wie gewöhnlich bei den Differentialen vorausgesetzt wird, nicht unendlich klein zu sein.

113. Wenn ein Quaternion Q eine Funktion eines anderen veränderlichen Quaternions q (und gegebener Quaternionen oder Skalare) ist, sodass man setzen kann,

$$Q = F(q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 1)$$

so wird, wenn q in $q + dq$ geändert wird, auch Q eine Änderung erfahren, welche wir mit $\triangle Q$ bezeichnen. Es ist somit

$$\triangle Q = F(q + dq) - F(q).$$

Die beiden Gröszen $\triangle Q$ und dq nennen wir jedoch *nicht* simultane Differentiale. Wie in dem ersten Abschnitte wollen

wir als solche die Gröszen dQ, dq betrachten, wenn dQ nach der Gleichung (e. 2) bestimmt wird

$$dQ = Lim.\, n\left[F\left(q + \frac{dq}{n}\right) - F(q)\right],\ Lim.\, n \doteq \infty \quad . \ . \ (e.\ 2)$$

Um simultane Quaterniondifferentiale zu erhalten, musz man deshalb der unabhängigen Veränderlichen eine Änderung $dq : n$ erteilen, und die dadurch bewirkte Änderung der Funktion mit n multipliciren. Der Grenzwert für $Lim.\, n = \infty$, ist sodann das zu dq gehörige simultane Differential des Quaternions Q.

Es ist hierbei zu beachten, dass die Division durch n nur den Tensor von dq verringert; der Versor dieser Grösze bleibt ungeändert.

Die Funktion

$$F\left(q + \frac{dq}{n}\right) - F(q)$$

wollen wir im Folgenden mit $\triangle_n Q$ bezeichnen.

Es ist sodann

$$dQ = Lim.\, n \triangle_n Q,\ Lim.\, n = \infty. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (e.\ 3)$$

114. Wenn wir die Funktion

$$Lim.\, n\left[F\left(q + \frac{dq}{n}\right) - F(q)\right] = \Phi\,(q, dq)$$

näher betrachten, — man kann dieselbe an einem Beispiel berechnen — so erkennt man unmittelbar, dass dieselbe im allgemeinen nicht von der Form $\Phi(q)dq$ sein kann. Es ist dies offenbar darin begründet, dass die Faktoren bei der Multiplikation der Quaternionen nicht commutativ sind.

Es musz aber stets die Funktion $\Phi(q, dq)$ linear und homogen in dq sein. Dies zu beweisen teilen wir dq in zwei Teile, welche dr und ds genannt werden mögen. Es wird dadurch:

$$\begin{aligned}\Phi(q, dq) &= Lim.\, n\left[F\left(q + \frac{dr + ds}{n}\right) - F(q)\right] \\ &= Lim.\, n\left[\left\{F\left(q + \frac{dr + ds}{n}\right) - F\left(q + \frac{dr}{n}\right)\right\} + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left\{F\left(q + \frac{dr}{n}\right) - F(q)\right\}\right]\end{aligned}$$

$$\Phi(q, dq) = Lim.\, n\left[F\left(q + \frac{dr + ds}{n}\right) - F\left(q + \frac{dr}{n}\right)\right] +$$
$$+ Lim.\, n\left[F\left(q + \frac{dr}{n}\right) - F(q)\right]$$
$$= Lim.\, \Phi\left(q + \frac{dr}{n}, ds\right) + \Phi(q, dr)$$

und zuletzt

$$\Phi(q, dq) = \Phi(q, ds) + \Phi(q, dr) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 3^*)$$

Aus dieser Gleichung kann unmittelbar geschlossen werden, dass $\Phi(q, dq)$ in Bezug auf dq, linear und homogen ist.

Eine wichtige Folgerung lässt sich noch machen, nämlich

$$\Phi\,(q, xdq) = x\Phi\,(q, dq) \quad \ldots\ldots,\ldots \quad (e.\ 4)$$

weil jedes Glied der Funktion Φ mit x multiplicirt wird, wenn dasselbe mit dq stattfindet.

Wenn das Differential einer Quaternionfunktion in Bezug auf einen Skalar x bestimmt wird nach der Definition

$$Df(q,x) = Lim.\, n\left[f\left(q, x + \frac{dx}{n}\right) - f(q, x)\right],\ Lim.\, n = \infty,$$

so bleibt natürlich der Satz gültig, dass dieses Differential in Bezug auf dx linear und homogen ist. Weil aber der Faktor dx mit den anderen Faktoren commutativ ist, so nimmt das Differential die Form an

$$f'(q, x)\, dx$$

$f'\,(q, x)$ kann in diesem Falle der Differentialquotient in Bezug auf x heiszen.

115. Einige Beispiele der Berechnung der Differentiale einfacher Quaternionfunktionen mögen hier Platz finden.

1⁰. $\qquad Q = q^2.$

Es wird hiermit

$$\triangle_n Q = \left(q + \frac{dq}{n}\right)^2 - q^2 = q\,\frac{dq}{n} + \frac{dq}{n}\,q + \left(\frac{dq}{n}\right)^2$$
$$dQ = Lim.\, n \triangle_n Q = q\, dq + dq\, .\, q$$

oder kurz

$$d\,.\,q^2 = q\, dq + dq\,.\,q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 5)$$

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass dq und q nicht complanar sind. Wenn $dq \,|||\, q$, so erhält man einfacher

$$d\,.\,q^2 = 2\,q\,dq$$

analog der Differentialrechnung bei Skalaren.

2⁰. $$Q = q^{-1} = \frac{1}{q}.$$

Man erhält

$$\triangle_n Q = \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-1} - q^{-1} = \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-1}\left[1 - \left(q + \frac{dq}{n}\right)q^{-1}\right]$$

$$= \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-1}\left[1 - 1 - \frac{dq}{n}q^{-1}\right] = -\left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-1} dq\,.\,q^{-1}$$

und somit

$$d\,.\,q^{-1} = Lim.\,n\,\triangle_n Q = -\,q^{-1}\,dq\,.\,q^{-1} \quad \ldots\ldots \text{(e. 6)}$$

Wenn $dq \,|||\, q$, so ist $d\,.\,q^{-1} = -\,q^{-2}\,dq$.

3⁰. $$Q = q^{-2} = \frac{1}{q^2}.$$

Wie bei dem vorigen transformirt man

$$\triangle_n Q = \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-2} - q^{-2} = \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-2}\left[1 - \left(q + \frac{dq}{n}\right)^2 q^{-2}\right]$$

$$= \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-2}\left[1 - \left\{q^2 + q\frac{dq}{n} + \frac{dq}{n}q + \left(\frac{dq}{n}\right)^2\right\}q^{-2}\right]$$

$$= \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-2}\left[1 - 1 - q\frac{dq}{n}q^{-2} - \frac{dq}{n}q^{-1} - \left(\frac{dq}{n}\right)^2 q^{-2}\right]$$

$$= -\left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-2}\left[q\frac{dq}{n}q^{-2} + \frac{dq}{n}q^{-1} + \frac{(dq)^2}{n^2}q^{-2}\right]$$

somit

$$d\,.\,q^{-2} = Lim.\,n\,\triangle_n Q = -\,q^{-1}\,dq\,.\,q^{-2} - q^{-2}\,dq\,.\,q^{-1}\,.\,. \quad \text{(e. 7)}$$

Wenn $dq \,|||\, q$, wird $d\,.\,q^{-2} = -\,2\,q^{-3}\,dq$

116. In diesem Artikel werden einige allgemeinen Regeln für Quaterniondifferentiation angegeben werden. Es sei dabei stets c ein constanter Quaternion, q ein veränderlicher, $Q = f(q)$ und $\chi = \Phi(q)$ zwei willkürliche Funktionen des Quaternions q. Man erhält sodann

1⁰. $$dc = 0$$

2⁰. $$d(Q + c) = Lim.\,n\left[f\left(q + \frac{dq}{n}\right) + c - \{f(q) + c\}\right] =$$

$$= Lim.\,n\left[f\left(q + \frac{dq}{n}\right) - f(q)\right] = d\,Q$$

oder

$$d(Q+c)=d\,Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\,9)$$

3⁰. Allgemeiner ist

$$d(Q+\chi)=dQ+d\chi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e.\,10)$$

Denn es ist

$$d(Q+\chi)=Lim.\,n\left[\left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right)+\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right)\right\}-\{f(q)+\Phi(q)\}\right]$$

$$=Lim.\,n\left[\left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right)-f(q)\right\}+\left\{\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right)-\Phi(q)\right\}\right]$$

$$=Lim.\,n\left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right)-f(q)\right\}+Lim.\,n\left\{\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right)-\Phi(q)\right\}$$

$$=dQ+d\chi.$$

4⁰.

$$d(Q\chi)=Qd\chi+dQ.\chi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e.\,11)$$

Nach der Substitution der Funktionen f, Φ, wird nämlich

$$d.Q\chi=Lim.\,n\left[f\left(q+\frac{dq}{n}\right)\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right)-f(q)\,\Phi(q)\right]$$

$$=Lim.\,n\left[\left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right)\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right)-f\left(q+\frac{dq}{n}\right)\Phi\,(q)\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right)\Phi(q)-f(q)\,\Phi(q)\right\}\right]$$

$$=Lim.\,f\left(q+\frac{dq}{n}\right)n\left\{\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right)-\Phi(q)\right\}+$$

$$+Lim.\,n\left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right)-f(q)\right\}\Phi(q)$$

$$=f(q)\,d\Phi(q)+df(q)\,.\,\Phi(q)$$

$$=Q\,d\chi+dQ.\chi$$

Besondere Fälle dieses Satzes sind die nachfolgenden

$$d.cQ=c.dQ,\quad d.Qc=dQ.c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e.\,12)$$

117. Es kann der in ($e.$ 11) ausgesprochene Satz dazu verwendet werden, das Differential einer willkürlichen Potenz eines Quaternions zu ermitteln.

Wir fanden schon ($e.$ 5)

$$d.q^2=qdq+dq.q.$$

Und es wird jetzt weiter:

$$d.q^3=d.q^2q=q^2dq+(d.q^2)q \text{ nach } (e.\,11)=q^2dq+qdq.q+dq.q^2$$

$$d.q^4 = d.q^3 q = q^3 dq + (d.q^3) q = q^3 dq + q^2 dq.q + q dq.q^2 + dq.q^3.$$

Man erkennt in dieser Weise, dass allgemein für ganze positive Werte von m

$$d.q^m = q^{m-1}\, dq + q^{m-2}\, dq.q + q^{m-3}\, dq.q^2 + \ldots + q^2\, dq.q^{m-3} + \\ + q dq.q^{m-2} + dq.q^{m-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 13)$$

Weil aber nach (e. 6)

$$dq^{-1} = -\, q^{-1}\, dq.q^{-1},$$

so wird

$$d.q^{-m} = -\, q^{-m}\, dq^m.q^{-m}$$

und nach Einführung des Wertes von $d.q^m$ aus (e. 13)

$$d.q^{-m} = -\, q^{-1}\, dq.q^{-m} - q^{-2}\, dq.q^{1-m} - q^{-3}\, dq.q^{2-m} \ldots \\ - q^{1-m}\, dq.q^{-2} - q^{-m}\, dq.q^{-1} \quad \ldots\ldots \quad (e.\ 14)$$

Wenn m eine gebrochene rationale Zahl ist, so lässt sich $d.q^m$ nicht mehr so leicht berechnen. Dies zu erreichen setzen wir

$$m = \frac{k}{l},$$

wo k und l ganze Zahlen sind und weiter

$$q^{\frac{k}{l}} = r \text{ oder } q^k = r^l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 14)$$

Indem wir die Differentiale der beiden Seiten dieser Gleichung bilden, erhalten wir die Gleichung:

$$q^{k-1}\, dq + q^{k-2}\, dq.q + \ldots + q dq.q^{k-2} + dq.q^{k-1} = \\ = r^{l-1}\, dr + r^{l-2}\, dr.r + \ldots + r.dr.r^{l-2} + dr.r^{l-1}$$

und es gilt jetzt aus dieser Gleichung dr aufzulösen. Die Gröszen r, $r^2 \ldots r^{l-1}$ sollen dazu sämtlich in q ausgedrückt werden, also

$$q^{\frac{k}{l}},\ q^{2\frac{k}{l}}, \ldots q^{(l-1)\frac{k}{l}} \text{ oder } q^m, q^{2m}, \ldots q^{(l-1)m}.$$

Die Auflösung einer solchen Gleichung erörtern wir im nächsten Abschnitt; es ist jedoch leicht dieselbe für den besonderen Fall $m = \frac{1}{2}$ zu finden.

Bei dieser Annahme nämlich wird die Gleichung (e. 15) reducirt zur nachstehenden

$$dq = r dr + dr.r \text{ oder } dq = q^{\frac{1}{2}}\, dr + dr.q^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \quad (e.\ 16)$$

Wir erhalten daraus, indem wir dieselbe *mit* $q^{-\frac{1}{2}}$ und *durch* $Kq^{\frac{1}{2}}$ multipliciren,

$$q^{-\frac{1}{2}}\,dq.Kq^{\frac{1}{2}} = dr.Kq^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\,dr.q^{\frac{1}{2}}\,Kq^{\frac{1}{2}}$$
$$= dr.Kq^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\,dr.Nq^{\frac{1}{2}}$$
$$= dr.Kq^{\frac{1}{2}} + Tq.q^{-\frac{1}{2}}\,dr$$

Nach (*b.* 24*) ist jedoch

$$Nq.q^{-1} = Kq$$

oder indem man q durch $q^{\frac{1}{2}}$ ersetzt

$$Tq.q^{-\frac{1}{2}} = Kq^{\frac{1}{2}}.$$

Es wird deshalb

$$q^{-\frac{1}{2}}\,dq.Kq^{\frac{1}{2}} = dr.Kq^{\frac{1}{2}} + Kq^{\frac{1}{2}}\,dr$$

Nach (*e.* 16) ist weiter

$$dq = dr.q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}\,dr$$

Die Addition dieser Gleichungen ergibt

$$dq + q^{-\frac{1}{2}}\,dq.Kq^{\frac{1}{2}} = 4\,dr.Sq^{\frac{1}{2}}$$

und hieraus wird gefunden

$$dr = \frac{dq + q^{-\frac{1}{2}}\,dq.Kq^{\frac{1}{2}}}{4\,Sq^{\frac{1}{2}}} = d.q^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (e.\,17)$$

Wenn $dq \,|||\, q$, so kann man wieder beträchtlich vereinfachen.

Es gehen sodann die beiden Formeln (*e.* 13), (*e.* 14) über in

$$d.q^m = mq^{m-1}\,dq\,,\quad d.q^{-m} = -\,mq^{-m-1}\,dq$$

und die Formel (*e.* 17) ergibt

$$dq^{\frac{1}{2}} = \frac{dq(1 + q^{-\frac{1}{2}}\,Kq^{\frac{1}{2}})}{4\,Sq^{\frac{1}{2}}} = \frac{dq.q^{-\frac{1}{2}}\,(q^{\frac{1}{2}} + Kq^{\frac{1}{2}})}{4\,Sq^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{1}{2}\,q^{-\frac{1}{2}}\,dq.$$

Diese Resultate stimmen mit den bekannten Formeln der Differentialrechnung bei Skalaren überein.

Als ein einziges Beispiel der Differentiation eines Quaternions oder Vektors in Bezug auf einen Skalar sei die mit (*d.* 65) bezeichnete Funktion $\rho = \varepsilon^x \alpha$ gewählt, in der α willkürlich und ε ein Einheitsvektor senkrecht zu α ist.

Es wird hiermit

$$d\rho = Lim.\,n\left[\varepsilon^{x + \frac{dx}{n}}\,\alpha - \varepsilon^x\alpha\right] = Lim.\,n\,\varepsilon^x\left(\varepsilon^{\frac{dx}{n}} - 1\right)\alpha$$

$$= Lim.\,n\,\varepsilon^x\left[cos\left(\frac{dx}{n}\,\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(\frac{dx}{n}\,\frac{\pi}{2}\right).\,\varepsilon - 1\right]\alpha.$$

Bei wachsendem m nähert $cos\,\frac{dx}{n}\,\frac{\pi}{2}$ sich der Einheit und der Sinus nähert sich dem Bogen; somit ist

$$d\rho = dx \,.\, \frac{\pi}{2}\, \varepsilon^{x+1}\, \alpha = dx \,.\, \frac{\pi}{2}\, \varepsilon\rho \, \ldots\ldots \quad (e.\ 17^*)$$

118. Wenn ein Quaternion eine Änderung erfährt, so werden natürlich im allgemeinen dessen Tensor, Versor, Skalar und Vektorteil, und Winkel auch geändert werden. Mit der Untersuchung der Differentiale dieser Gröszen wollen wir uns in diesem Artikel beschäftigen und zuerst sei gewählt

$$dKq = Lim.\, n\left[K\left(q + \frac{dq}{n}\right) - Kq\right] = Lim.\, n\left[K\frac{dq}{n}\right] =$$
$$= Lim.\, n\left[\frac{1}{n}\, Kdq\right] = Kdq.$$

Man ersieht leicht, dass man in dieser Weise die nachstehenden Formeln erhalten kann

$$dKq = K.dq\,,\ dSq = S.dq\,,\ dVq = V.dq. \ \ldots \quad (e.\ 18)$$

Weniger einfach gestalten sich jedoch die Differentiale der übrigen Gröszen, wie aus dem weiteren erhellen wird:

$dNq = d.qKq = dq.Kq + qdKq$ nach $(e.\ 11) = dq.Kq + qKdq.$

Es ist aber allgemein

$K.q'Kq = KKq.Kq'$ nach $(b.\ 54) = qKq'.$

Indem man dieses Resultat bei der vorhergehenden Formel anwendet, erhält man

$$dNq = dq.Kq + K.dqKq = (1 + K)\, dqKq = 2S.dqKq = 2S.Kqdq$$

oder kürzer

$$dNq = 2\, S(Kqdq) \ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 19)$$

Dieselbe Formel hätte auch leicht mit Hülfe der Relation $(b.\ 115)$ erhalten werden können in nachfolgender Weise

$$dNq = Lim.\, n\left[N\left(q + \frac{dq}{n}\right) - Nq\right] = Lim.\, n\left[N\frac{dq}{n} + 2S\left(\frac{dq}{n}Kq\right)\right]$$
$$= Lim.\, n\left[\frac{1}{n^2}\, Ndq + \frac{2}{n}\, S(dqKq)\right] = 2\, S(dq.Kq).$$

Hieraus wird leicht dTq erhalten; denn es ist

$$dTq = d(Nq)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\, Nq^{-\frac{1}{2}}\, dNq = \frac{1}{2\,Tq}\, dNq = \frac{S.Kqdq}{Tq} =$$
$$= S\frac{Kqdq}{Tq} \text{ nach } (b.\ 102).$$

Indem man noch die Gleichung $(b.\ 24)$ anwendet, wird

$$dTq = S\frac{dq}{Uq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 20)$$

Man kann jedoch diese Formel auch in anderer Gestalt erhalten. Nehmen wir wieder auf:

$$dTq = S\frac{Kq.dq}{Tq}$$

wie oben gefunden, und beachten wir die Gleichung (b. 24*), so wird

$$\frac{dTq}{Tq} = S.\frac{Kqdq}{Nq} = S\frac{dqKq}{Nq} \text{ nach } (b\ 153) = S\frac{dq}{q} \ldots \quad (e.\ 21)$$

Den hier hergeleiteten Relationen schlieszt sich eine andere für $d.\rho^2$, wenn mit ρ ein Vektor bezeichnet wird, an; denn es ist

$$d.\rho^2 = -dN\rho = -2\,S(K\rho d\rho) \text{ nach } (e.\ 19) = 2\,S(\rho d\rho) \text{ nach } (c.\ 12)$$

oder kurz

$$d.\rho^2 = 2\,S.\rho d\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 22)$$

$$dUq = d\frac{q}{Tq} = \frac{dq}{Tq} - \frac{q}{Tq^2}dTq = \frac{1}{Tq}\left(dq - q\frac{dTq}{Tq}\right) = \frac{1}{Tq}\left(dq - qS\frac{dq}{q}\right) =$$

$$= \left(\frac{dq}{q} - S\frac{dq}{q}\right)\frac{q}{Tq} = V\frac{dq}{q} \cdot \frac{q}{Tq} = V\frac{dq}{q}.Uq.$$

Bei beiderseitiger Multiplikation *durch* $\frac{1}{Uq}$, erhält man schlieszlich

$$\frac{dUq}{Uq} = V\frac{dq}{q} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 23)$$

Indem die Gleichungen (e. 21) (e. 23) addirt werden, wird erhalten

$$\frac{dTq}{Tq} + \frac{dUq}{Uq} = \frac{dq}{q}$$

im Einklange mit dem Resultate, welches durch die Differentiation der Gleichung

$$q = TqUq$$

erhalten wird.

119. Wir haben in dem vorigen Artikel einige Fundamentalformeln bewiesen, welche jetzt dazu verwendet werden mögen, einige weniger einfachen herzuleiten. Zuerst sei genommen $dUVq$.

Nach (e. 23) ist

$$\frac{dUVq}{UVq} = V\frac{dVq}{Vq} = V\frac{Vdq}{Vq} \text{ nach } (e.\,18) = V\frac{IVdq}{IVq} \text{ nach}(b.88)\quad (e.24)$$

Der Richtung nach fallen $IVdq$ und IVq zusammen mit $Ax.dq$, $Ax.q$ bzhw.

Die Ebene des Quaternions

$$IVdq : IVq$$

ist demnach senkrecht zur Durchschnittsgeraden der Ebenen der Quaternionen dq, q.

Fig. 60

Ist in der Figur 60 $q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$, $dq = \mathrm{OC} : \mathrm{OA}$, $\mathrm{OD} = Ax.q$, $\mathrm{OE} = Ax.dq$, so wird OA oder der gemeinschaftliche Nenner der beiden Quaternionen q, dq auch

$$Ax\,(IVdq : IVq)$$

sein, und somit fällt

$$IV(IVdq : IVq)$$

der Richtung nach mit OA zusammen.

Es erscheint daher $dUVq$ nach (e. 24) als das Produkt zweier rechten Quaternionen oder deren Indices, und die letzteren fallen längs OA, OD bzhw. $dUVq$ ist somit ein Quaternion in der Ebene DOA. Die Achse dieses Quaternions liegt in der Ebene des Quaternions q und ist senkrecht zur Durchschnittsgeraden der Ebenen von q und dq.

$$dVUq = VdUq \text{ nach } (e.\,18) = V\left[V\frac{dq}{q}.\,Uq\right] \quad \ldots\ldots \quad (e.\,25)$$

$$dSUq = S.dUq = S\left[V\frac{dq}{q}.\,Uq\right] = S\left[V\frac{dq}{q}(SUq + VUq)\right]$$

$$= S\left[V\frac{dq}{q}VUq\right] = S\left[\left(S\frac{dq}{q} + V\frac{dq}{q}\right)VUq\right] = S.\frac{dq}{q}VUq$$

oder kurz

$$dSUq = S.\frac{dq}{q}\,VUq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\,26)$$

Diese Formel setzt uns in den Stand $d\angle q$ zu berechnen. Denn nach (b. 103) ist

$$SUq = \cos \angle q\,,$$

somit

$$dSUq = -\sin \angle q \, d\angle q.$$

Die Vergleichung der Formeln (*b.* 124) (*b.* 125) ergibt

$$VUq = \sin \angle q \,.\, UVq$$

und hiermit geht (*e.* 26) über in:

$$dSUq = S.\frac{dq}{q} \sin \angle q UVq = \sin \angle q \, S.\frac{dq}{q} UVq.$$

Nun musz dieses Resultat nach einer vorigen Gleichung auch

$$-\sin \angle q \; d \angle q$$

sein. Man erhält demnach

$$d \angle q = -S.\frac{dq}{q} UVq. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; (e.\ 27)$$

Diese Gleichung kann noch ein wenig umgestaltet werden. Weil nämlich nach (*b.* 129),

$$(UVq)^2 = -1\,,$$

so ist

$$UVq = -\frac{1}{UVq}\,,$$

und es wird

$$d \angle q = S\left(\frac{dq}{q}. - UVq\right) = S.\frac{dq}{q} \frac{1}{UVq} = S \frac{dq}{qUVq}$$

weil q und UVq complanar sind und deshalb in dem Produkte derselben umgetauscht werden können. Schlieszlich ist daher die Formel erhalten

$$d \angle q = S \frac{dq}{qUVq} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; (e.\ 28)$$

Nach (*e.* 21) wird weiter

$$\frac{dTVq}{TVq} = S\frac{dVq}{Vq} = S\frac{Vdq}{Vq}$$

oder

$$dTVq = S.Vdq \frac{TVq}{Vq} = S\frac{Vdq}{UVq} = TVdq \, S\frac{UVdq}{UVq}.$$

Es sind $UVdq$, UVq rechte Radiale in den Ebenen der Quaternionen dq, q bzhw. Der Quotient derselben ist somit ein rechter Radial, dessen Achse mit der Durchschnittsgeraden der

genannten Ebenen zusammenfällt, und der Skalarteil dieses Radials ist daher der Cosinus des Winkels dieser Ebenen oder des Winkels der Achsen der Quaternionen dq, q. Bezeichnet man diesen Winkel mit $\angle(Ax.\,q,\ Ax.\,dq)$, so wird schlieszlich

$$dTVq = TVdq \cos\angle(Ax.\,q,\ Ax.\,dq)\ .\ .\ .\ .\ .\ (e.\ 29)$$

120. Die im ersten Abschnitte bei (a. 50) bewiesene Gleichung

$$Td\rho = ds$$

kann mit den jetzt erörterten Begriffen noch in andrer Gestalt erscheinen.

Wenn ρ und s als Funktionen des Skalars u betrachtet werden, so ist auch

$$T\frac{d\rho}{du} = \frac{ds}{du}$$

oder wenn die Derivirten

$$\frac{d\rho}{du},\ \frac{ds}{du} \text{ mit } \rho',\ s'$$

bezeichnet werden

$$T\rho' = s' \text{ und } T\rho'^2 = s'^2.$$

Es ist jedoch

$$T\rho'^2 = -\rho'^2,$$

weil ρ' ein Vektor ist. Somit geht die zuletzt erhaltene Gleichung über in die nachfolgende

$$\rho'^2 + s'^2 = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (e.\ 30)$$

Bei nochmaliger Differentiation erhält man nach (e. 22)

$$S.\rho' d\rho' + s' ds' = 0,$$

oder indem durch du dividirt und statt

$$\frac{d\rho'}{du},\ \frac{ds'}{du}$$

wieder ρ'', s'' eingeführt werden,

$$S\rho'\rho'' + s's'' = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (e.\ 31)$$

Eine dritte Differentiation ergibt:

$$S\rho'\rho''' + \rho''^2 + s's''' + s''^2 = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (e.\ 32)$$

u. s. w.

Wenn die Grösze s als unabhängige Variable gewählt wird, so gehen die vier vorhergehenden Gleichungen über in die einfacheren

$$T\rho' = 1,\ \rho'^2 + 1 = 0,\ S\rho'\rho'' = 0,\ S\rho'\rho''' + \rho''^2 = 0.$$

121. Wenn eine Funktion $F(Q)$ gegeben ist, in der Q eine Funktion eines Quaternions q bedeutet, so kann man das Differential $dF(Q)$ folgenderweise in dq ausdrücken. Es mögen dQ, dq simultane Differentiale der Gröszen Q, q sein; man kann sodann erst $dF(Q)$ in dQ ausdrücken, indem man berechnet:

$$dF(Q) = Lim.\, n\left[F\left(Q + \frac{dQ}{n}\right) - F(Q)\right].$$

Dadurch entsteht eine Gleichung der Form

$$dF(Q) = \Phi(Q, dQ) \ldots\ldots\ldots\ldots (e.\ 33)$$

Sodann kann man dQ mittelst dq ausdrücken. Denn, wenn

$$Q = f(q),$$

so ist

$$dQ = Lim.\, n\left[f\left(q + \frac{dq}{n}\right) - f(q)\right]$$

Dadurch erhält man

$$dQ = \psi(q, dq) \ldots\ldots\ldots\ldots (e.\ 34)$$

und indem dieses Resultat in ($e.$ 33) eingeführt wird

$$dF(Q) = \Phi(Q, \psi(q, dq)) \ldots\ldots\ldots (e.\ 35)$$

Die Richtigkeit des hier erörterten Verfahrens wird aus den nachstehenden Betrachtungen einleuchten. Der Definition nach ist

$$dF(Q) = Lim.\, n\left[F\left\{f\left(q + \frac{dq}{n}\right)\right\} - F\{f(q)\}\right] \ldots (e.\ 36)$$

und

$$df(q) = Lim.\, n\left\{f\left(q + \frac{dq}{n}\right) - f(q)\right\}.$$

Man kann demnach setzen:

$$n\left\{f\left(q + \frac{dq}{n}\right) - f(q)\right\} = df(q) + \varepsilon,$$

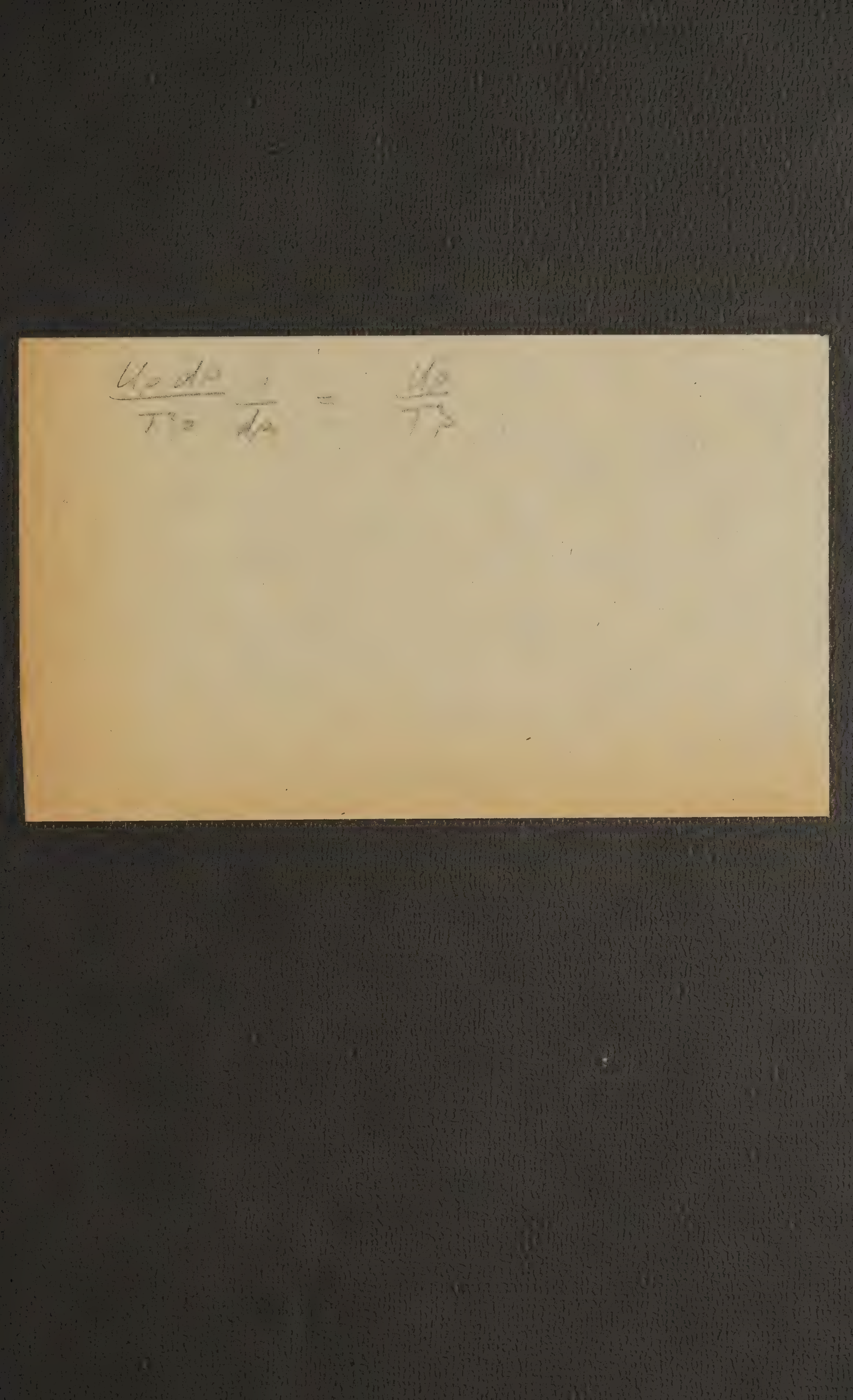
wenn ε eine Grösze ist, welche verschwindet, wenn n ins Unendliche wächst.

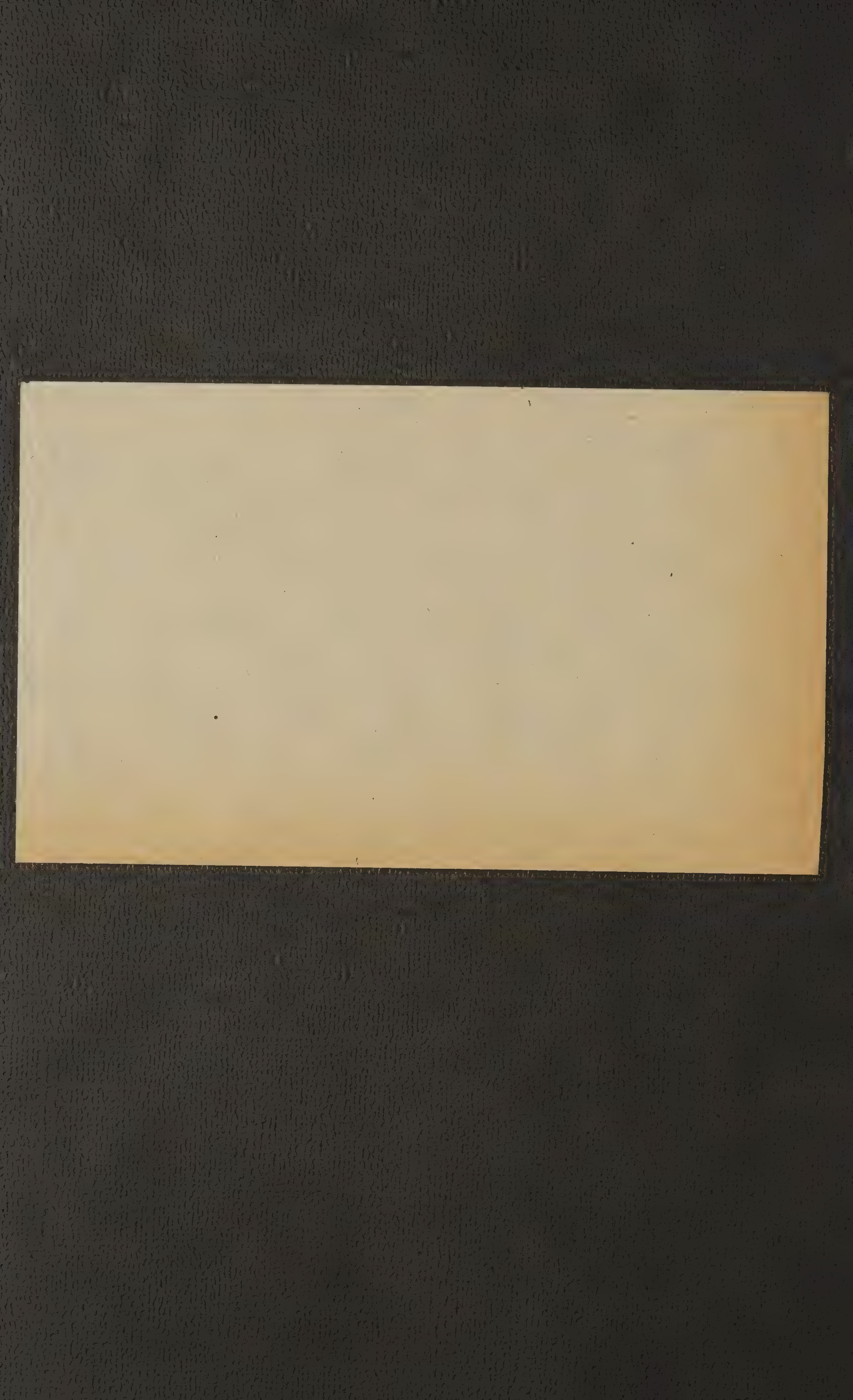
In andrer Schreibweise wird die letzere Gleichung

$$f\left(q + \frac{dq}{n}\right) = Q + n^{-1}(dQ + \varepsilon).$$

Hiermit geht aber ($e.$ 36) in die nachstehende Gestalt über

$$dF(Q) = Lim.\, n\left[F\left(Q + \frac{dQ + \varepsilon}{n}\right) - F(Q)\right].$$





Die zweite Seite ist das Differential der Funktion $F(Q)$, wenn das Differential der Grösze Q mit $dQ + \varepsilon$ bezeichnet wird; mit der oben eingeführten Bezeichnung wird deshalb

$$dF(Q) = Lim.\, \Phi(Q, dQ + \varepsilon)$$

und nach (e. 3*)

$$dF(Q) = \Phi(Q, dQ) + Lim.\, \Phi(Q, \varepsilon).$$

Das zweite Glied der zweiten Seite verschwindet aber, weil $\Phi(Q, \varepsilon)$ in Bezug auf ε linear und homogen ist, während $Lim.\, \varepsilon$ der Null gleich kommt.

Nehmen wir z. B.

$$d(q^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir setzen

$$q^2 - 1 = Q,$$

so wird nach (e. 17)

$$d.Q^{\frac{1}{2}} = \frac{dQ + Q^{-\frac{1}{2}}\, dQ\,.\,KQ^{\frac{1}{2}}}{4\, SQ^{\frac{1}{2}}}$$

und indem man statt Q wieder $q^2 - 1$, statt dQ nach (e. 5), (e. 9) $qdq + dq.q$ einführt, erhält man:

$$d.(q^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{qdq + dq.q + (q^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(qdq + dq.q)K(q^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{4\, S(q^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \quad . \; (e.\,37)$$

122. Wir wollen nun weiter eine Anwendung machen, welche uns nachher Nutzen gewähren wird. Es sei der Bruch

$$F(q, x) : f(q, x)$$

in Betracht gezogen, bei welchem für einen bestimmten Wert x_1 von x

$$F(q, x_1) = f(q, x_1) = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (e.\,38)$$

werde.

Der Wert des Bruches für $x = x_1$ wird somit unbestimmt. Als den wahren Wert des Bruches betrachten wir für diesen Fall

$$\frac{F(q, x_1)}{f(q, x_1)} = Lim.\, \frac{F\left(q, x_1 + \dfrac{dx}{n}\right)}{f\left(q, x_1 + \dfrac{dx}{n}\right)}.$$

Es ist sodann weiter

$$\frac{F(q, x_1)}{f(q, x_1)} = Lim. \frac{F\left(q, x_1 + \frac{dx}{n}\right) - F(q, x_1)}{f\left(q, x_1 + \frac{dx}{n}\right) - f(q, x_1)} \text{ nach } (e. 38)$$

$$= Lim. \frac{n\left[F\left(q, x_1 + \frac{dx}{n}\right) - F(q, x_1)\right]}{n\left[f\left(q, x_1 + \frac{dx}{n}\right) - f(q, x_1)\right]}$$

$$= \frac{F'(q, x_1)\, dx}{f'(q, x_1)\, dx} \text{ nach Art. 114} = \frac{F'(q, x_1)}{f'(q, x_1)}$$

wenn mit F', f' die Differentialquotienten bezeichnet werden.

Wenn jedoch für einen bestimmten Wert q_1 von q die Gröszen $F(q, x)$ und $f(q, x)$ verschwinden, so sind wir nicht berechtigt

$$Lim. \frac{F\left(q_1 + \frac{dq}{n}, x\right)}{f\left(q_1 + \frac{dq}{n}, x\right)}.$$

als den wahren Wert des Bruches zu definiren; denn es wäre sodann herzuleiten, dass dieser Wert auf

$$dF(q_1, x) : df(q_1, x)$$

führt, wo dF, df die Differentiale in Bezug auf q sind. In Zähler und Nenner des letzteren Ausdrucks käme dq jedoch nicht als commutativer Faktor vor; es fiele derselbe somit in dem endgültigen Resultat nicht fort und der Wert des Bruches bliebe unbestimmt, denn es würde derselbe mit dem Werte der Grösze dq sich ändern.

Wenn in dem ersteren Falle auch

$$F'(q, x) : f'(q, x)$$

unbestimmt ist, so hat man natürlich in diesem Bruche Zähler und Nenner nochmals zu differenziren.

123. Wenn man einem Quaternion q eine Änderung dq erteilt, so wollen wir diese Grösze das erste Differential von q nennen. Wenn nachher eine zweite Änderung dem Quaternion q erteilt wird, so kann dieselbe stets in dq und eine andere Grösze, welche wir mit d^2q bezeichnen wollen, zergliedert werden;

d^2q soll sodann das zweite Differential des Quaternions q heiszen. Es braucht dies nicht mit dq complanar zu sein und auch nicht verschwindend klein.

Die ganze Änderung, welche q erfahren hat, ist

$$2\,dq + d^2q.$$

Das erste Differential einer Funktion $F(q)$ ist, wie wir vorher fanden, als Funktion der beiden Gröszen q, dq zu betrachten, so dass man setzen kann:

$$dF(q) = \Phi(q, dq).$$

Wir definiren nun das zweite Differential der Funktion $F(q)$, welches wir zugleich mit $ddF(q)$ oder $d^2F(q)$ bezeichnen wollen, durch die Gleichung

$$d^2F(q) = Lim.n\left[\Phi\left(q+\frac{dq}{n}, dq+\frac{d^2q}{n}\right)-\Phi(q,dq)\right], Lim.n=\infty \quad (e.39)$$

Aus dieser Definition geht unmittelbar ein Satz hervor. Denn man erhält:

$$d^2F(q) = Lim.\,n\left[\Phi\left(q+\frac{dq}{n}, dq+\frac{d^2q}{n}\right)-\Phi\left(q, dq+\frac{d^2q}{n}\right)\right]+$$

$$+Lim.\,n\left[\Phi\left(q, dq+\frac{d^2q}{n}\right)-\Phi(q, dq)\right], \; Lim.\,n=\infty.$$

Das erste Glied der zweiten Seite dieser Gleichung ist das Differential der Funktion

$$Lim.\,\Phi\left(q, dq+\frac{d^2q}{n}\right)$$

oder $\Phi(q, dq)$ nach q genommen, während dq constant bleibt; das zweite Glied das Differential der Funktion $\Phi(q, dq)$ nach dq genommen, während q constant bleibt. Wir schreiben deshalb:

$$d^2F(q) = Lim.\,d_q\Phi\left(q, dq+\frac{d^2q}{n}\right)+d_{dq}\,\Phi(q, dq), \; Lim.\,n=\infty$$

oder

$$d^2F(q) = d_q\Phi(q, dq) + d_{dq}\,\Phi(q, dq) \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e.\,40)$$

wo unter $d_q\Phi(q, dq)$ die Änderung verstanden wird, welche die Funktion Φ dadurch erfährt, dass q in $q+dq$ übergeht, und in gleicher Weise unter $d_{dq}\,\Phi(q, dq)$ die Änderung von Φ der Zunahme der Grösze dq um d^2q zufolge. Es erscheint somit das zweite Differential aus zwei anderen, ersten, Differentialen zusammengesetzt.

Wenden wir uns nunmehr zu einigen Beispielen der Berechnung

1⁰. $d^2.q^2 = qd^2q + 2\,dq^2 + d^2q.q \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (e.\,41)$

wo in dem mittleren Gliede der zweiten Seite dq^2 statt (dq^2) geschrieben ist.

Es ist hierbei

$$d.q^2 = qdq + dq.q = \Phi(q, dq)$$

und demzufolge

$$d_q\Phi(q, dq) = dq.dq + dq.dq = 2\,dq^2$$
$$d_{dq}\,\Phi(q, dq) = qd^2q + d^2q.q^2.$$

Bei der Differentiation ist in der ersten Formel dq, in der zweiten q als constant zu betrachten.

Durch Addition erhält man die Formel $(e.\,41)$

2⁰. $d^2.q^{-1} = 2\,(q^{-1}dq)^2q^{-1} - q^{-1}d^2q.q^{-1} \, . \, . \, . \, . \, . \quad (e.\,42)$

Es ist nämlich

$$\Phi(q, dq) = d.q^{-1} = -\,q^{-1}dq.q^{-1}$$

$$d_q\Phi(q, dq) = -\,d(q^{-1})\,dq.q^{-1} - q^{-1}dqd(q^{-1})$$
$$= +\,q^{-1}dq.q^{-1}dq.q^{-1} + q^{-1}dq.q^{-1}dq.q^{-1} = 2\,(q^{-1}dq)^2q^{-1}$$
$$d_{dq}\Phi(q,dq) = -\,q^{-1}d^2q.q^{-1}.$$

124. Mit dem vorigen Artikel haben wir schon ein bisher noch nicht in Betracht gezogenes Gebiet betreten, die Differentiation der Funktionen, welche zwei unabhängige Veränderliche enthalten, sei es denn, dass die eine derselben in diesen Funktionen stets linear und homogen vorkam.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir allgemein die Differentiation der Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen $q, q', q'', \ldots$ näher ins Auge fassen und einige Sätze beweisen.

Es sei $F(q, q', q'' \ldots)$ die in Betracht kommende Funktion. Wenn nun die Veränderlichen $q, q', q'' \ldots$ Änderungen dq, dq', $dq \ldots$ erfahren, deren jede endlich und willkürlich sein kann, so wollen wir als das totale Differential der Funktion F definiren:

$$dF = Lim.\,n\left[F\left(q + \frac{dq}{n}, q' + \frac{dq'}{n}, q'' + \frac{dq''}{n}, \ldots\ldots\right) - \right.$$
$$\left. - F(q, q', q'' \ldots)\right],\ Lim.\,n = \infty\,.$$

Indem wir den zwischen Klammern stehenden Ausdruck zergliedern, wie nachstehend:

$$F\left(q+\frac{dq}{n}, q'+\frac{dq'}{n}, q''+\frac{dq''}{n}, \ldots\right)-F\left(q, q'+\frac{dq'}{n}, q''+\frac{dq''}{n}, \ldots\right)+$$
$$+F\left(q, q'+\frac{dq'}{n}, q''+\frac{dq''}{n}, \ldots\right)-F\left(q, q', q''+\frac{dq''}{n}, \ldots\right)+$$
$$+F\left(q, q', q''+\frac{dq''}{n}, \ldots\right)-F(q, q', q'', \ldots)$$

. . . .

ersehen wir, wie im Art. 123, dass dF als die Summe n anderer Ausdrücke betrachtet werden kann, welche wir in folgender Weise bezeichnen wollen

$$dF = d_q F + d_{q'} F + d_{q''} F + \ldots \ldots \quad (e. 43)$$

und welche successive die Änderungen bedeuten, die die Funktion F erfährt, wenn jedesmal eine einzige der Veränderlichen einen Zuwachs erhält, während die übrigen sämtlich constant bleiben.

Man kann somit diese Gröszen die **partiellen Differentiale** der Function F in Bezug auf jede der Variablen q, q', q'' . . . nennen.

Aus Art. 114 wissen wir, dass $d_q F$ in Bezug auf dq homogen und linear ist, und dasselbe ist mit $d_{q'} F$, $d_{q''} F$ . . . in Bezug auf dq', dq'' . . . bzhw. der Fall. Das totale Differential dF ist somit homogen und linear in Bezug auf alle die Gröszen dq, dq', dq'' . . .

125. Einige Beispiele mögen das vorhergehende erläutern.

1°. $$F = qq'.$$

Es ist hiebei

$$dF = qdq' + q'dq \quad \ldots \ldots \ldots \quad (e. 44)$$

Denn der Bedeutung nach ist

$$d_q F = dq.q' \text{ und } d_{q'} F = qdq'.$$

Bei der ersten Differentiation ist nämlich q', bei der zweiten q als constant zu betrachten.

2°. $$F = \frac{q'}{q}.$$

Es wird

$$dF = \frac{dq'}{q} - q'\,q^{-1}dq.q^{-1} \;\ldots\ldots\ldots \;(e.\,45)$$

denn

$$d_q F = q' d\,\frac{1}{q} = -\,q' q^{-1} dq.q^{-1} \text{ und } d_{q'} F = \frac{dq'}{q}$$

3°.
$$F = q^{-1} q';$$

Hierbei ist

$$dF = -\,q^{-1}dq.q^{-1}q' + q^{-1}dq' \;\ldots\ldots\ldots\; (e.\,46)$$

weil

$$d_q F = d(q^{-1}) \cdot q' = -\,q^{-1}dq.q^{-1}q' \text{ und } d_{q'}F = q^{-1}dq'.$$

126. Wenn allgemein

$$F = Q\chi,$$

wo Q, χ jede für sich eine Funktion der Gröszen q, q', $q''\ldots$ ist, so werden für die partielle Differentiation nach ($e.$ 11) die Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} d_q Q\chi &= d_q Q.\chi + Q d_q \chi \\ d_{q'} Q\chi &= d_{q'} Q.\chi + Q d_{q'} \chi \\ d_{q''} Q\chi &= d_{q''} Q.\chi + Q d_{q''} \chi \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Durch Addition wird somit erhalten

$$\begin{aligned} (d_q + d_{q'} + d_{q''} + \ldots)\, Q\chi = {} & (d_q + d_{q'} + d_{q''} + \ldots)\, Q.\chi \\ & + Q(d_q + d_{q'} + d_{q''} + \ldots)\,\chi \end{aligned}$$

oder

$$dQ\chi = dQ.\chi + Qd\chi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (e.\,47)$$

Das Theorem ($e.$ 11) bleibt somit gültig, wenn darin die Symbole d als totale Differentiale von Funktionen mehrerer Variablen betrachtet werden.

Weil das zweite Differential einer Funktion F einer einzigen Veränderlichen nach der Definition ein totales Differential ist, so ersieht man leicht die Richtigkeit der nachfolgenden Transformationen, wobei wir voraussetzen, die beiden Funktionen Q, χ seien nur von q abhängig.

$$\begin{aligned} d^2 Q\chi &= d.dQ\chi = d(Qd\chi + dQ.\chi) \text{ nach } (e.\,11) \\ &= Qdd\chi + dQd\chi + dQd\chi + ddQ.\chi \end{aligned}$$

oder

$$d^2 Q\chi = Qd^2\chi + 2\,dQd\chi + d^2Q.\chi \;\ldots\ldots\; (e.\,48)$$

$$d^2Nq = d.dNq = d.2S(Kq.dq) \text{ nach } (e.\,19) = 2Sd(Kq.dq) \text{ nach } (e.\,18)$$
$$= 2\,S(dKq.dq + Kqd^2q) = 2\,S(Kdq.dq + Kqd^2q)$$
$$= 2\,S(Ndq + Kqd^2q) = 2\,(Ndq + S.Kqd^2q)$$

oder kürzer

$$d^2Nq = 2\,(Ndq + S.Kqd^2q) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (e.\,49)$$

Als besonderen Fall kann man hieraus herleiten, wenn ρ ein Vektor ist

$$d^2\rho^2 = -d^2N\rho = -2\,(Nd\rho + S.K\rho d^2\rho) = -2Nd\rho + 2\,S.\rho d^2\rho.$$

Wird unter $d\rho$ ein Vektor verstanden, so ist noch $Nd\rho$ durch $(d\rho)^2$ oder $-d\rho^2$ zu ersetzen; daher

$$d^2.\rho^2 = 2\,d\rho^2 + 2\,S.\rho d^2\rho \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (e.\,50)$$

127. Bisweilen wird angenommen, dass das zweite Differential der unabhängigen Veränderlichen q verschwindet. Es hat dies den Vorteil, dass die vorhergehenden Formeln beträchtlich vereinfacht werden. So gehen z. B. die Gleichungen ($e.$ 41) ($e.$ 42) hierdurch über in

$$d^2.q^2 = 2\,dq^2 \text{ und } d^2.q^{-1} = 2\,(q^{-1}dq)^2q^{-1} \;.\;.\;.\; (e.\,51)$$

Bei derselben Voraussetzung erhält man auch:

$$(q + dq)^2 = q^2 + qdq + dq.q + dq^2 = q^2 + d.q^2 + \tfrac{1}{2}\,d^2.q^2$$

eine Formel, analog dem Taylorschen Satze, auf den wir später zurückkommen.

128. Man kann nunmehr auch leicht dritte und höhere Differentiale einer Funktion einer einzigen unabhängigen Variablen verstehen. Es ist nämlich das zweite Differential eine Funktion der Gröszen q, dq, d^2q. Das dritte Differential definiren wir als das totale Differential des zweiten, wenn die Gröszen q, dq, d^2q als unabhängige Variablen betrachtet werden, und demgemäsz willkürliche Änderungen dq, d^2q, d^3q erfahren.

Analoge Definitionen können für die höheren Differentiale festgestellt werden.

Man ersieht leicht, dass man hat

$$d^3Q\chi = d.d^2Q\chi = d(Qd^2\chi + 2\,dQd\chi + d^2Q.\chi)$$
$$= (Qd^3\chi + dQd^2\chi) + (2dQd^2\chi + 2d^2Qd\chi) + d^2Qd\chi + d^3Q.\chi)$$
$$= Qd^3\chi + 3\,dQd^2\chi + 3\,d^2Qd\chi + d^3Q.\chi$$

und allgemein

$$d^nQ\chi = Qd^n\chi + \binom{n}{1} dQd^{n-1}\chi + \binom{n}{2} d^2Qd^{n-2}\chi + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \binom{n}{2} d^{n-2}Qd^2\chi + \binom{n}{1} d^{n-1}Qd\chi + d^nQ.\chi \quad . \; (e.\,52)$$

129. Natürlich können auch partielle Differentiale der zweiten und höheren Ordnung gebildet werden. Das erste partielle Differential nach q einer Funktion $F(q, q', q'' \ldots)$ ist nämlich eine Funktion der Gröszen $q, dq, q', q'' \ldots$ Bildet man nun das erste partielle Differential nach q' dieser Funktion so entsteht ein Ausdruck, welchen wir mit $d_{q'}d_qF$ bezeichnen.

Einige Beispiele mögen dies erörtern.

Es sei

$$F = qq',$$

so ist

$$d_qF = dq.q'$$

somit wird

$$d_{q'}d_qF = dq.dq' \text{ sein.}$$

Es sei zweitens

$$F = q^2q'^2,$$

so ist

$$d_qF = (qdq + dq.q)q'^2$$

und

$$d_{q'}d_qF = (qdq + dq.q)\,(q'dq' + dq'.q') = qdq.q'dq' + dq.qq'dq + \\ + qdq.dq'.q + dq.qdq'.q'$$
$$d_qd_qF = (qd^2q + 2\,dq^2 + d^2q.q^2)q'^2 \text{ u. s. w.}$$

Es gilt, wie in der Differentialrechnung bei Skalaren der Satz

$$d_qd_{q'}F = d_{q'}d_q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; (e.\,53)$$

Den Definitionen zufolge ist nämlich

$$d_qF = Lim.\, n \left[F\left(q + \frac{dq}{n}, q', \ldots\right) - F(q, q', \ldots) \right], \; Lim\; n = \infty$$

$$d_{q'}d_qF = d_{q'}\; Lim.\, n \left[F\left(q + \frac{dq}{n}, q', \ldots\right) - F(q, q', \ldots) \right]$$

$$= Lim.m \left[Lim.n \left[\left\{ F\left(q + \frac{dq}{n}, q' + \frac{dq'}{m}, \ldots\right) - F\left(q, q' + \frac{dq'}{m}, \ldots\right) \right\} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left\{ F\left(q + \frac{dq}{n}, q', \ldots\right) - F(q, q', \ldots) \right\} \right] \right], \; \begin{matrix} Lim.\; m = \infty\,. \\ Lim.\; n = \infty\,. \end{matrix}$$

$$=Lim.n\left[Lim.m\left[\left\{F\left(q+\frac{dq}{n},q'+\frac{dq'}{m},\ldots\right)-F\left(q+\frac{dq}{n},q'\ldots\right)\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left\{F\left(q,q'+\frac{dq'}{m},\ldots\right)-F(q,q',\ldots)\right\}\right]\right]$$
$$=d_q\,Lim.\,m\left[F\left(q,q'+\frac{dq'}{m},\ldots\right)-F(q,q',\ldots)\right]$$
$$=d_q d_{q'} F$$

130. Eine wichtige Aufgabe, in diesem Abschnitte noch zu lösen, ist die Erledigung der Frage, ob bei Quaterniondifferentialen ein dem Taylorschen Satze analoges Theorem gültig ist. In der Tat wird sich ergeben, dass dies bei gewissen Voraussetzungen der Fall sein kann.

Die endgültige Form desselben ist, wenn wir eine symbolische wählen,

$$f(q+dq)=\left(1+d+\tfrac{1}{2}\,d^2+\frac{1}{2.3}\,d^3+\ldots\frac{1}{2\ldots p}\,d^p\right)f(q)+R \quad (e.54)$$

wobei vorausgesetzt werden musz, dass keine der Gröszen $f(q+dq)$, $f(q)$, $df(q)$, $d^2f(q)$ unendlich grosz wird, und dass bei den höheren Differentialen, von $d^2f(q)$ an, die Grösze d^2q der Null gleich gesetzt ist.

Die obige Form zu erhalten, machen wir die nachstehenden Überlegungen.

Aus der Definition

$$df(q)=Lim.\,n\left[f\left(q+\frac{dq}{n}\right)-f(q)\right],\ Lim.\,n=\infty,$$

folgt

$$df(q)+\varepsilon_1=n\left[f\left(q+\frac{dq}{q}\right)-f(q)\right]$$

wenn ε_1 eine Grösze ist, welche bei wachsendem n der Null sich nähert.

Daher ist

$$f\left(q+\frac{dq}{n}\right)=f(q)+n^{-1}df(q)+\varepsilon_1 n^{-1} \quad .\ .\ .\ .\ (e.\,55)$$

In dieser Gleichung wollen wir q durch $q+\dfrac{dq}{n}$ ersetzen; es soll dann zuerst untersucht werden, was aus $df(q)$ wird. Nach dem Vorhergehenden ist

$$df(q) = \Phi\,(q\,,dq).$$

Es soll nun hierin q mit $\frac{dq}{n}$ wachsen.

Weil aber nach unsren Voraussetzungen

$$d^2q = 0$$

gesetzt wird, so lässt die Gleichung (*e.* 39) sich vereinfachen zur nachstehenden Formel

$$Lim.\,n\left[\Phi\left(q + \frac{dq}{n}\,,dq\right) - \Phi(q,dq)\right] = d^2f(q)$$

und somit

$$\Phi\left(q + \frac{dq}{n}, dq\right) = \Phi\,(q, dq) + n^{-1}\,d^2f(q) + \varepsilon_2\,n^{-1}$$

$$= df(q) + n^{-1}\,d^2f(q) + \varepsilon_2\,n^{-1}$$

wo ε_2 der Null sich nähert, wenn n ins Unendliche wächst.

Die Gleichung (*e.* 55) liefert nunmehr, wenn wir q durch $q + \frac{dq}{n}$ ersetzen

$$f\left(q + 2\frac{dq}{n}\right) = f\left(q + \frac{dq}{n}\right) + n^{-1}\,df(q) + n^{-2}\,d^2f(q) + \varepsilon_2 n^{-2} + \varepsilon_1 n^{-1}$$

$$= f(q) + 2n^{-1}df(q) + n^{-2}d^2f(q) + 2\varepsilon_1 n^{-1} + \varepsilon_2 n^{-2}\ . \ (e.\ 56)$$

In gleicher Weise erkennen wir, dass, wenn wir nochmals q durch $q + \frac{dq}{n}$ ersetzen, $d^2f(q)$ in

$$d^2f(q) + n^{-1}\,d^3f(q) + \varepsilon_3\,n^{-1}$$

übergeht. Denn auch $d^2f(q)$ hat jetzt die Form

$$\psi(q,dq)$$

erhalten, und es ist nun

$$\psi(q + \frac{dq}{n}, dq)$$

zu bestimmen aus

$$Lim.\,n\left[\psi\left(q + \frac{dq}{n}, dq\right) - \psi(q, dq)\right] = d^3f(q).$$

Somit wird

$$f\left(q + 3\,\frac{dq}{n}\right) = f(q) + 3\ n^{-1}\,df(q) + 3\,n^{-2}\,d^2f(q) + n^{-3}\,d^3f(q) +$$

$$+ 3\,\varepsilon_1\,n^{-1} + 3\,\varepsilon_2\,n^{-2} + \varepsilon_3\,n^{-3}$$

und wenn man in dieser Weise fortfährt, zuletzt

$$f\left(q+m\frac{dq}{n}\right)=$$

$$f(q)+\binom{m}{1}n^{-1}\,df(q)+\binom{m}{2}n^{-2}\,d^2f(q)+\ldots\ldots+\binom{m}{m}n^{-m}\,d^mf(q)+$$
$$+\binom{m}{1}\varepsilon_1\,n^{-1}+\binom{m}{2}\varepsilon_2\,n^{-2}+\ldots\ldots+\binom{m}{m}\varepsilon_m\,n^{-m}.$$

Diese Gleichung wollen wir noch eine kleine Abänderung erfahren lassen. Die $(p+1)$ ersten Glieder der zweiten Seite sollen nämlich hingeschrieben werden; die Summe aller übrigen Glieder jedoch wollen wir mit einem einzigen Buchstaben R' bezeichnen. Es wird sodann

$$f\left(q+\frac{m}{n}\,dq\right)=f(q)+\binom{m}{1}n^{-1}\,df(q)+\binom{m}{2}n^{-2}\,d^2f(q)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\binom{m}{p}n^{-p}\,d^pf(q)+R' \quad \ldots\ldots \quad (e.\ 57)$$

wenn

$$R'=\binom{m}{p+1}n^{-p-1}\,d^{p+1}f(q)+\ldots\ldots+\binom{m}{m}n^{-m}\,d^m f(q)+$$
$$+\binom{m}{1}\varepsilon_1\,n^{-1}+\binom{m}{2}\varepsilon_2\,n^{-2}+\ldots\ldots+\binom{m}{m}\varepsilon_m\,n^{-m}.$$

Lässt man nunmehr m und n ins Unendliche wachsen, derart dass

$$Lim.\ (m:n)=1,$$

während man p einen endlichen Wert beilegt, so geht die Gleichung (e. 57) über in

$$f(q+dq)=f(q)+df(q)+\tfrac{1}{2}\,d^2f(q)+\frac{1}{2.3}\,d^3f(q)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{1}{2\ldots p}\,d^pf(q)+R \quad \ldots\ldots \quad (e.\ 58)$$

wo R den Grenzwert des vorhergehenden R' bedeutet für die Annahme

$$Lim.\ m=Lim.\ n=\infty\,.$$

131. Es ist hiermit das Taylor'sche Theorem der Form nach hergeleitet. Zu beachten ist dabei, dass dq eine endliche Grösze sein kann. Eine bestimmte Gestalt für R, oder vielmehr Grenzwerte, zwischen denen R enthalten sein musz, haben wir nicht

12

gefunden. Wir wollen dieselben auch nicht suchen. Nur wollen wir noch zeigen, dass man bei der Annahme

$$Lim.\ Tdq = 0$$

die Reihe bei einem beliebigen Gliede abbrechen kann, indem die Summe der übrigen Glieder gegen das zuletzt beibehaltene verschwindet.

Oder um uns präciser auszudrücken, können wir sagen:

Wenn

$$Lim.\ T.dq = 0,$$

und die Reihe bei dem Gliede

$$\frac{d^m f(q)}{1.2\ldots.m} = q_m$$

abgebrochen wird, so musz

$$Lim.\ TR_m : Lim.\ Tq_m$$

der Null sich nähern, wenn Tq_m endlich ist.

Unter R_m ist hierbei die Summe aller nach q_m kommenden Glieder der Reihe verstanden also

$$R_m = \frac{d^{m+1}f(q)}{1.2\ldots.(m+1)} + \ldots\ldots.. + R.$$

Bei dem Beweise dieses Satzes wollen wir Hamilton ganz folgen.

Man ersetze in (*e.* 58) dq durch xdq, und lege sich nun erst die Frage vor, welche Änderungen dies in $df(q)$, $d^2f(q)$, ... hervorruft.

Nach (*e.* 4) geht dadurch $df(q)$ in $xdf(q)$ über, weil $df(q)$ homogen und linear in Bezug auf dq ist.

Wie schon hervorgehoben, ist $d^2f(q)$ bei unsren Voraussetzungen von der Form $\psi(q, dq)$. Es ist jedoch leicht zu ersehen, dass diese Funktion homogen vom zweiten Grade in Bezug auf dq sein soll. Denn es ist $df(q)$ eine Summe von Gliedern, welche die Gestalt $Qdq.Q_1$ haben, wo Q, Q_1 Funktionen von q sind. Bei der zweiten Differentiation erhält man, weil $d^2q = 0$, aus einem einzigen Gliede

$$dQ.dq.Q_1 + Qdq.dQ_1$$

und hierin sind dQ, dQ_1 homogen und linear in Bezug auf dq; somit wird auch der ganze Ausdruck homogen vom zweiten Grade in Bezug auf dq sein.

In derselben Weise erkennt man, dass $d^3 f(q)$ homogen vom dritten Grade in Bezug auf dq ist, u. s. w.

Wir wollen nun die Reihe (*e.* 58) bei dem Gliede $\frac{d^{m-1}f(q)}{1.2\ldots(m-1)}$ abbrechen.

Die Summe der nachherkommenden Glieder sei R_{m-1} und dieselbe gehe durch die Substitution von xdq statt dq in R_x über. Man erhält sodann:

$$f(q+xdq) = f(q) + xdf(q) + \frac{x^2}{1.2}d^2f(q) + \ldots\ldots + \\ + \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}d^{m-1}f(q) + R_x$$

und somit

$$R_x = f(q+xdq) - f(q) - xdf(q) - \frac{x^2}{1.2}d^2f(q)\ldots\ldots - \\ - \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}d^{m-1}f(q) \quad \ldots\ldots \quad (e.\ 59)$$

Wenn man nun weiter x abnehmen lässt, so wird dadurch auch $T.xdq$ kleiner werden, während jedoch $U.xdq$ ungeändert bleibt. Man kann deshalb xdq, für $Lim.\ x = 0$, betrachten als einen Quaternion dq mit fortwährend abnehmendem Tensor aber unveränderlichem Versor.

Wir werden nun zuerst versuchen den Wert zu finden von

$$Lim. \frac{R_x}{\frac{x^m}{1.2\ldots.m}d^mf(q)} \text{ für } Lim.\ x = 0.$$

Nach (*e.* 59) wird $Lim.\ R_x = 0$, wenn $Lim.\ x = 0$. Dasselbe gilt auch von dem Nenner des betrachteten Bruches. Der gesuchte Grenzwert ist deshalb unbestimmt. Es sind jedoch Zähler und Nenner als Funktionen des Skalars x zu betrachten; wenn dieselben für einen Wert dieses Variablen verschwinden, so gibt das in Art. 122 Erörterte das Mittel an, den wahren Wert des Bruches zu erhalten.

Wir wollen nach diesem Artikel die successiven Differentialquotienten der Grösze R_x bestimmen, bis wir einen erhalten haben, welcher für $x = 0$ endlich bleibt. Dieselben seien mit DR_x, $D^2R_x\ldots$. bezeichnet. Wir finden sodann aus (*e.* 59)

$$DR_x = Df(q+xdq) - df(q) - xd^2f(q) - \frac{x^2}{1.2}d^3f(q)\ldots\ldots -$$

$$- \frac{x^{m-2}}{1.2\ldots(m-2)}d^{m-1}f(q)\ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 60)$$

worin noch $Df(q+xdq)$ bestimmt werden soll. Es ist

$$Df(q+xdq) = \frac{1}{dx}Lim.n\left[f\left\{q+\left(x+\frac{dx}{n}\right)dq\right\} - f(q+xdq)\right], Lim.n=\infty,$$

$$= \frac{1}{dx}Lim.n\left[f\left(q+xdq+dx\frac{dq}{n}\right) - f(q+xdq)\right]$$

Der Faktor der Grösze $\frac{1}{dx}$ ist aber, der Definition nach, das Differential der Funktion $f(q+xdq)$, genommen bei der Voraussetzung, dass das Differential der unabhängigen Variablen mit $dx.\ dq$ bezeichnet wird. Bei der Bezeichnung des Artikels 114 ist jener Faktor somit die Grösze $\Phi(q+xdq, dxdq)$, und nach der Gleichung ($e.$ 4) kann dieser Ausdruck ersetzt werden durch $dx\, df(q+xdq)$.

Die zuletzt erhaltene Gleichung geht dadurch über in:

$$Df(q+xdq) = df(q+xdq) \ldots\ldots \quad (e.\ 61)$$

und hieraus erfolgt nun auch weiter

$$D^2f(q+xdq) = d^2f(q+xdq)$$

. . . .

Anstatt der Gleichung ($e.$ 60) kann dadurch geschrieben werden:

$$DR_x = df(q+xdq) - df(q) - xd^2f(q) - \frac{x^2}{1.2}d^3f(q)\ldots\ldots -$$

$$- \frac{x^{m-2}}{1.2\ldots(m-2)}d^{m-1}f(q)$$

und man erhält hieraus weiter:

$$D^2R_x = d^2f(q+xdq) - d^2f(q) - xd^3f(q)\ldots\ldots - \frac{x^{m-3}}{1.2\ldots(m-3)}d^{m-1}f(q)$$

$$D^3R_x = d^3f(q+xdq) - d^3f(q) - xd^4f(q)\ldots\ldots - \frac{x^{m-4}}{1.2\ldots(m-4)}d^{m-1}f(q)$$

. . . .

. . . .

$$D^{m-1}R_x = d^{m-1}f(q+xdq) - d^{m-1}f(q)$$

$$D^mR_x = d^mf(q+xdq)$$

Der m^{te} Differentialquotient ist, wie hieraus ersichtlich, der

erste, welcher für $x = 0$ nicht verschwindet. Berechnen wir auch noch den m^{ten} Differentialquotienten des Nenners des in Betracht gezogenen Bruches, so finden wir

$$D^m \frac{x^m}{1.2 \ldots . m} d^m f(q) = d^m f(q)$$

Für $Lim.\, x = 0$, wird somit erhalten

$$Lim. \frac{R_x}{\frac{x^m}{1.2 \ldots . m} d^m f(q)} = Lim. \frac{d^m f(q + xdq)}{d^m f(q)} = 1.$$

Es war jedoch R_x der Wert, welchen R_{m-1} oder

$$\frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m} + R_m$$

erhielt, wenn man darein xdq statt dq einführte. Der Grenzwert der Grösze R_x für verschwindendes x kann man deshalb und nach den vorhergehenden Erörterungen auch als den Grenzwert der Grösze R^{m-1} für ein dq mit verschwindendem Tensor betrachten.

In gleicher Weise ist

$$Lim. \frac{x^m}{1.2 \ldots . m} d^m f(q) \text{ für } Lim.\, x = 0,$$

dassselbe wie

$$Lim. \frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m}$$

für ein dq mit verschwindendem Tensor.

Somit ist:

$$Lim. \frac{R_{m-1}}{\frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m}} = 1, \text{ wenn } Lim.\ Tdq = 0$$

oder

$$Lim. \frac{\frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m} + R_m}{\frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m}} = 1,$$

und deshalb auch

$$Lim. \frac{R_m}{\frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m}} = 0.$$

Wenn Tdq der Null sich nähert, verschwindet somit R_m gegen $\frac{d^m f(q)}{1.2\ldots.m}$, und dies ist was wir im Anfange dieses Artikels beweisen wollten.

In gleicher Weise hätte man auch beweisen können, dass die Grösze

$$f(q+dq)-f(q)-df(q)+\tfrac{1}{2}\,d^2f(q)+\ldots\ldots+\frac{d^m f(q)}{1.2\ldots.m}$$

bei abnehmendem dq (d. h. wenn $Lim.\ Tdq=0$), der Grösze

$$\frac{(dq)^m}{1\ldots.m}$$

gegenüber, verschwinden musz; ein Satz, welcher bisweilen Nutzen gewähren kann.

132. Wenn

$$df(q)=\Phi(q,dq),$$

so wollen wir die Funktion $f(q)$ das Integral der Funktion $\Phi(q,dq)$ nennen und mit $\int\Phi(q,dq)$ bezeichnen, oder in Zeichen

$$f(q)=\int\Phi(q,dq),\ \text{wenn}\ df(q)=\Phi(q,dq)\ \ldots\ (e.\ 62)$$

Eine Methode der Integration ist somit die Umkehrung der Differentialformeln, und die nachstehenden Integrale sind nach ($e.$ 5), ($e.$ 6), ($e.$ 7), ($e.$ 17) unmittelbar hinzuschreiben:

$$\int(qdq+dq.q)=q^2\ \ldots\ldots\ (e.\ 63)$$

$$\int q^{-1}dq.q^{-1}=-q^{-1}\ \ldots\ldots\ (e.\ 64)$$

$$\int(q^{-1}dq.q^{-2}+q^{-2}dq.q^{-1})=-q^{-2}\ \ldots\ (e.\ 65)$$

$$\int\frac{dq+q^{-\frac{1}{2}}\,dq.Kq^{\frac{1}{2}}}{S.q^{\frac{1}{2}}}=4\,q^{\frac{1}{2}}\ \ldots\ldots\ (e.\ 66)$$

Eine zweite Methode, die der partiellen Integration, wird der Formel ($e.$ 11) zufolge

$$d.Q\chi=Qd\chi+dQ\chi$$

ebenfalls anwendbar sein. Denn aus dieser Formel geht hervor:

$$\int Qd\chi=Q\chi-\int dQ.\chi\ \ldots\ldots\ (e.\,67)$$

wie in der Differentialrechnung bei Skalaren.

Das Theorem is jedoch bisweilen in allgemeinerer Gestalt notwendig. Dieselbe kann aus der Formel

$$d.Q\,Q_1Q_2=QQ_1dQ_2+QdQ_1.Q_2+dQ.Q_1Q_2$$

welche ohne Mühe bewiesen wird, hergeleitet werden und lautet:

$$\int QdQ_1 . Q_2 = QQ_1Q_2 - \int QQ_1dQ_2 - \int dQ.Q_1Q_2 \quad . \quad . \quad (e. 68)$$

Wäre z. B. das in (*e.* 64) mitgeteilte Integral zu finden, so erhielte man

$$\int q^{-1}dq.q^{-1} = q^{-1}qq^{-1} - \int q^{-1}qdq^{-1} - \int dq^{-1}.qq^{-1} \text{ nach } (e. 68)$$
$$= q^{-1} - 2\int dq^{-1} = - q^{-1},$$

wie in (*e.* 64) schon verzeichnet.

133. Es sei $F(q, dq)$ eine in Bezug auf dq homogene und lineare Funktion. Fassen wir nur diejenigen Änderungen der Grösze q ins Auge, welche zwischen einem Anfangswerte q_0 und einem Endwerte q_1 liegen, und setzen wir voraus, dass die Änderung fortwährend stetig erfolgt.

Die successiven Werte von q seien mit

$$q_0, \; q', \; q'', \; q''' \ldots\ldots, \; q^{(l)}, \; q_1$$

bezeichnet und der Kürze halber möge gesetzt werden

$$q' - q_0 = dq_0, \; q'' - q' = dq', \ldots\ldots q_1 - q^{(l)} = dq^{(l)}.$$

Die Gröszen $q', \; q'' \ldots\ldots, q^{(l)}$ seien so gewählt, dass

$$Tdq_0, \; Tdq', \; Tdq'' \ldots\ldots Tdq^{(l)}$$

sämtlich unendlich klein sind.

Bilden wir nun die Summe

$$\Sigma F(q^{(i)}, \; dq^{(i)}),$$

wobei das Zeichen Σ auf die successiven Werte von i Bezug nimmt, so wollen wir den Grenzwert derselben bei abnehmendem $dq^{(i)}$ das zwischen den Grenzen q_0, q_1 genommene bestimmte Integral der Funktion $F(q, dq)$ nennen und mit

$$\int_{q_0}^{q_1} F(q, dq)$$

bezeichnen.

In Hinsicht auf den Wert dieses Integrals können nun zwei Fälle unterschieden werden.

1°. Die Funktion F ist das Differential einer gewissen Funktion $f(q)$, somit

$$F(q, dq) = df(q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e. 69)$$

Bei dieser Voraussetzung lässt sich der Wert des bestimmten Integrales leicht angeben. Denn es lässt sich nunmehr die Gleichung hinschreiben

$$f(q+dq)=f(q)+df(q)+\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e.\,70)$$

oder

$$f(q+dq)-f(q)=F(q,\,dq)+\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (e.\,71)$$

Ist nun Tdq sehr klein, so kann gezeigt werden, dass die Grösze

$$\varepsilon=f(q+dq)-f(q)-df(q)$$

in Verhältnis zu $df(q)$ verschwinden musz und zwar kann dieser Beweis analog dem in Art. 131 geführten gegeben werden, indem man setzt

$$\varepsilon_x=f(q+xdq)-f(q)$$

und die Grenze sucht, der sich der Bruch $\varepsilon_x : xdf(q)$ bei abnehmendem x nähert.

Es mag hierbei bemerkt werden, dass hier in Bezug aut d^2q keine besondere Annahme gemacht ist.

Die Gleichung ($e.$ 71) kann nun für jeden beliebigen Wert der Gröszen q, dq angewandt werden. Wir erhalten dadurch das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} f(q')-f(q_0)=F(q_0,\,dq_0)+\varepsilon_0 \\ f(q'')-f(q')=F(q',\,dq')+\varepsilon' \\ f(q''')-f(q'')=F(q'',\,dq'')+\varepsilon'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(q_1)-f(q^{(l)})=F(q^{(l)},dq^{(l)})+\varepsilon^{(l)} \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (e.\,72)$$

und durch Addition

$$f(q_1)-f(q_0)=\int_{q_0}^{q_1} F(q,dq)+\varepsilon_0+\varepsilon'+\varepsilon''+\ldots\ldots+\varepsilon^{(l)}. \quad (e.\,73)$$

Die Gröszen ε_0, ε', ... $\varepsilon^{(l)}$ sind sämtlich verschwindend klein in Verhältnis zu einem jeden der in den Gleichungen ($e.$ 72) ihnen vorangehenden Glieder, deren jedes von der Gröszenordnung der gewählten dq_0, dq', dq'', ... ist. Es lässt sich hieraus schlieszen, dass die Summe

$$\varepsilon_0+\varepsilon'+\varepsilon''\ldots\ldots+\varepsilon^{(l)}$$

von derselben Ordnung wie eine der Gröszen dq_0, dq', dq''.... sein musz, dass diese Summe somit dem in der Gleichung ($e.$ 72) sich vorfindenden bestimmten Integrale gegenüber verschwindet.

Es ist daher schlieszlich

$$f(q_1) - f(q_0) = \int_{q_0}^{q_1} F(q, dq), \text{ wenn } F(q, dq) = df(q) \quad . \; . \; . \; (e. 74)$$

Vorausgesetzt ist in dieser Gleichung nur noch, dass in der zweiten Seite Tdq verschwindend klein sein musz.

2°. Ist die Funktion F nicht als Differential einer anderen Funktion darstellbar, so behält das bestimmte Integral zwar einen Sinn insofern dasselbe dem Werte der Summe

$$F(q_0, dq_0) + F(q', dq') + \ldots\ldots + F(q^{(i)}, dq^{(i)})$$

gleich kommt, allein es ist dieser Wert im allgemeinen nicht ein bestimmter. Es geht dies einenteils daraus hervor, dass die bei dem vorhergehenden Falle angestellten Betrachtungen in diesem Falle nicht mehr anwendbar sind, andrenteils daraus dass die Änderung eines Quaternions mittelst derjenigen von *vier* Skalaren ausgedrückt werden kann, und der Wert der Summe wird in diesem Falle wesentlich dadurch beeinfluszt, in welcher Weise diese Skalare sich ändern.

Es ist dies ein Analogon der Integration längs verschiedenen Wegen, welcher man in der gewöhnlichen Rechnung begegnet, und wovon wir wissen, dass dieselbe bei gewissen Funktionen (den asynektischen) zu verschiedenen Resultaten führt.

Ein Beispiel zu diesen Erörterungen ist

$$\int_{q_0}^{q_1} (qdq + dq.q) = q_1^2 - q_0^2,$$

wie auch q von q_0 nach q_1 sich ändern möge. Dagegen hängt der Wert des Integrals

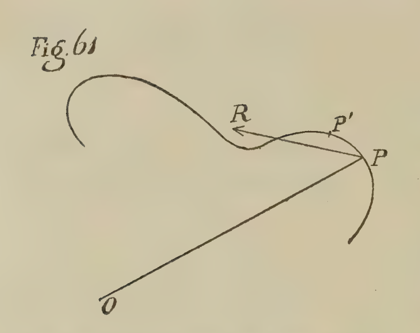
$$\int_{q_0}^{q_1} qdq$$

wesentlich von dieser Änderungsweise ab. Man kann somit die Funktion $qdq + dq.q$ auch hier eine synektische, die zweite qdq eine asynektische nennen.

134. Zwei Arten der bestimmten Integrale wollen wir noch besonders betrachten. Es sind dies die Linien- und die Oberflächenintegrale, denen man bei den Anwendungen häufig begegnet.

Wenn ρ der Vektor eines Punktes P einer gegebenen Curve ist (Fig. 61), aus welchem ein andrer Vektor R gezogen ist,

so kann man den Componenten R_t des Vektors R in die Richtung der Tangente in P bestimmen, und die Grösze



$$(T.R_t)\,(T.PP')$$

für den Punkt P bilden. Indem man dasselbe Verfahren in jedem Punkte der Curve anwendet und die Summe der so erhaltenen Gröszen bildet, erhält man das Linienintegral des Vektors R (längs der gegebenen Curve).

Man kann dasselbe auf sehr einfache Weise mit den Bezeichnungen des Quaternionencalcüls darstellen. Wenn nämlich statt PP′ der Vektor $d\rho$ gesetzt wird, so kann ein Element des Integrales durch

$$TR\ Td\rho\ cos \angle \frac{R}{d\rho}$$

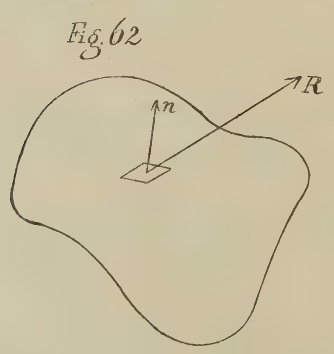
ausgedrückt werden, und diese Grösze lässt sich einfacher schreiben nach dem dritten Abschnitte, nämlich:

$$-S.\,Rd\rho.$$

Das Linienintegral ist somit

$$-\int_{\rho_0}^{\rho_1} S.\,Rd\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 75)$$

Wenn, um zu dem Oberflächenintegrale zu geraten, eine gegebene Oberfläche in willkürliche Elemente, die wir vor der Hand dS nennen wollen, geteilt wird, und bei jedem Elemente ein Vektor R gezogen ist, so kann man den Componenten R_n dieses Vektors R in die Richtung der nach einer bestimmten Seite der Oberfläche gezogenen Normale construiren, und die Grösze



$$(TR_n)\,(TdS)$$

bilden.

Die Summe aller in dieser Weise erhaltenen Glieder wird das Oberflächenintegral der Grösze R (längs der gegebenen Oberfläche) genannt. Wir wollen nunmehr einen Ausdruck dafür im Quaternionencalcül suchen.

Wenn wir mit ν einen Vektor bezeichnen, welcher in jedem Punkte der Oberfläche so construirt wird, dass derselbe der Richtung nach mit der Normale zusammenfällt, während

$$T\nu = TdS,$$

so ist das Oberflächenintegral durch

$$-\int S.\mathrm{R}\nu$$

darstellbar.

Wir können jedoch diesem Ausdruck eine präcisere Gestalt erteilen, wenn wir nach Art. 23 voraussetzen, der Vektor ρ eines Punktes der Oberfläche sei mittelst zwei Skalare ausgedrückt, wie nachstehend

$$\rho = \psi(u, v)\ \alpha + f(u, v)\ \beta + \phi(u, v)\gamma.$$

Denn es wird, wenn wir sodann hieraus das Differential des Vektors ρ in Bezug auf den Skalar u bilden, welches wir mit $d_u\rho$ bezeichnen wollen, $d_u\rho$ ein Element einer Curve auf der Oberfläche darstellen, weil ρ und $\rho + d_u\rho$ Vektoren zweier Punkte der Oberfläche sind. Dasselbe gilt auch von der Grösze $d_v\rho$.

Wenn wir nun die Grösze

$$S.\mathrm{R}d_u\rho d_v\rho$$

bilden, so ist dieselbe nach (*c*. 36) dem Volumen des auf den Vektoren R, $d_u\rho$, $d_v\rho$ als Seitenlinien construirten Parallelepipeds gleich, und es kommt dieses Volumen auch dem Ausdruck

$$(T.\mathrm{R}_n)\ (TdS)$$

gleich. Somit erhalten wir für das Oberflächenintegral die einfache Bezeichnung

$$\pm\int S.\mathrm{R}d_u\rho d_v\rho \text{. . . . . } (e.\ 76)$$

wo die Wahl des Zeichens dadurch bestimmt werden soll, nach welcher Seite hin die Normale gezogen gedacht ist.

AUFLÖSUNG VON QUATERNIONGLEICHUNGEN ERSTEN GRADES.

---

135. Als eine lineare Quaterniongleichung oder eine Quaterniongleichung ersten Grades betrachten wir den Ausdruck

$$f(q) = c,$$

wo c ein constanter Quaternion ist, wenn die Funktion f der Bedingung unterworfen ist:

$$f(q' + q'') = f(q') + f(q'') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 1)$$

Im allgemeinen wollen wir im Nachstehenden den unbekannten Quaternion mit q, diejenigen Quaternionen, welche bekannt vorausgesetzt werden mit $a', b', c', d', \ldots\ldots, a'', b'' \ldots\ldots$ bezeichnen.

Die bekannten Quaternionen können auch zu Skalaren degenerirt sein.

Die einzelnen Glieder der ersten Seite einer Gleichung der betrachteten Art können nur einer der nachstehenden drei Formen angehören:

1⁰. aqb, wo a, b auch aus einem Produkte mehrerer bekannten Quaternionen bestehen können,

2⁰. $a'S.b'qc'$,

3⁰. $a''V(b''qc'').d''$.

Dieselbe Bemerkung, welche auf a, b sub 1⁰ Bezug hatte, ist auch auf a', b' c', a'', b'', c'', d'' anwendbar.

Es kommen jedoch unter diesen drei Formen nur zwei wesentlich verschiedene vor; denn man erhält die nachstehenden Transformationen:

$$aqb = S.aqb + V.aqb \ldots\ldots\ldots (f.\ 2)$$

$$a'S.b'qc' = a'(b'qc' - V.b'qc') = a'b'qc' - a'V.b'qc' \ldots (f.\ 3)$$

$$a''V(b''qc'').d'' = a''(b''qc'' - S.b''qc'')d'' = a''b''qc'' - a''d''S.b''qc''.\ (f.\ 4)$$

wodurch eine jede der ursprünglichen Formen auf die beiden anderen reducirt werden kann.

Wenn wir die allgemeinste Form der Quaterniongleichung ersten Grades angeben wollen, so können wir demnach dazu wählen

$$\Sigma aqb + \Sigma cS.a'qb' = d \ldots\ldots\ldots (f.\ 5)$$

und bevor wir zur Transformation derselben schreiten, wollen wir die Gestalt der Glieder $cS.a'qb'$ noch vereinfachen.

Es ist nämlich

$S.a'qb' = S(a'q.b') = S(b'.a'q)$ nach $(b.\ 153) = S(b'a'.q) = S.eq$, $(f.\ 6)$

wenn $b'a'$ durch e ersetzt wird.

Daher geht die Gleichung $(f.\ 5)$ über in

$$\Sigma aqb + \Sigma cS.eq = d. \ldots\ldots\ldots (f.\ 7)$$

und wir wollen uns zunächst damit beschäftigen daraus eine sogenannte lineare Vektorgleichung herzuleiten.

136. Wir nehmen zu diesem Zwecke die Skalarteile der beiden Seiten der Gleichung, welche nach $(b.\ 95)$ eine neue Gleichung bilden. Dabei werden wir jedoch beachten müssen, dass

$S.aqb = S.baq$ nach $(f.\ 6) = SbaSq + S.Vba\,Vq$ nach $(b.\ 149)$

$S.cSeq = SeqSc$ nach $(b.\ 102)$

$= (SeSq + S.Ve\,Vq)Sc$ nach $(b.\ 149) = ScSeSq + S.Sc\,Ve\,Vq$

Wir erhalten demnach durch die Operation des Symbols S an die Gleichung $(f.\ 7)$

$$[\Sigma Sba + \Sigma ScSe]Sq + S.[\Sigma Vba + \Sigma Sc\,Ve]\,Vq = Sd\ \ldots (f.\ 8)$$

Setzen wir noch

$$\Sigma Sba + \Sigma ScSe = m,\ \Sigma Vba + \Sigma Sc\,Ve = \alpha. \ldots (f.\ 9)$$

wo der Bedeutung nach m eine Skalargrösze, α ein rechter Quotient (oder dessen Index) ist, so haben wir erhalten

$$mSq + S.\alpha\,Vq = Sd \ldots\ldots\ldots (f.\ 10)$$

In gleicher Weise wollen wir an die Gleichung $(f.\ 7)$ die Operation V anwenden und dabei beachten, dass

$$V.aqb = V.(aq)b = SaqVb + SbVaq + V.Vaq.Vb \text{ nach } (b. 149)$$
$$= (SaSq + S.VaVq)Vb + Sb(SaVq + SqVa + V.VaVq) +$$
$$+ V.(SaVq + SqVa + V.VaVq)Vb$$
$$= (SaVb + SbVa + V.VaVb)Sq + VbS.VaVq +$$
$$+ V.(SaSb + SbVa + SaVb)Vq + V.(V.VaVq)Vb$$

Nehmen wir für sich

$$V.(V.VaVq)Vb = - V.(VbV.VaVq) =$$
$$= - VqS.VaVb + VaS.VbVq \text{ nach } (c. 40)$$

so wird weiter

$$V.aqb = (SaVb + SbVa + V.VaVb)Sq + VbS.VaVq + VaS.VbVq +$$
$$+ V.(SaSb + SbVa + SaVb - S.VaVb)Vq$$
$$= VabSq + VaS.VbVq + VbS.VaVq +$$
$$+ V.(SbVa + SaVb + SaSb - S.VaVb)Vq$$

Noch ist

$$V.cSeq = SeqVc = (SeSq + S.VeVq)Vc \text{ nach } (b. 149) =$$
$$= SeVcSq + VcS.VeVq.$$

Das Resultat der Operation V an die Gleichung $(f. 7)$ ist somit

$$(\Sigma Vab + \Sigma SeVc)Sq + V.\Sigma(SbVa + SaVb + SaSb - S.VaVb)Vq$$
$$+ (\Sigma VaS.VbVq + \Sigma VbS.VaVq + \Sigma VcS.VeVq) = Vd \quad (f. 11)$$

oder, indem wir weiter setzen

$$\Sigma Vab + \Sigma SeVc = \beta, \quad \Sigma SbVa + \Sigma SaVb = \gamma,$$
$$\Sigma(SaSb - S.VaVb) = k \; \dots\dots \; (f. 12)$$

wo der Bedeutung nach β und γ rechte Quotienten oder Vektoren sind, k ein Skalar ist, so erhalten wir

$$\beta Sq + V.(k + \gamma)Vq + \Sigma VaS.VbVq + \Sigma VbS.VaVq +$$
$$+ \Sigma VcS.VeVq) = Vd \; \dots\dots\dots \; (f. 13)$$

Zwischen $(f. 10)$ und $(f. 13)$ kann Sq eliminirt werden. Das Resultat dieser Elimination ist

$$mV.(k + \gamma)Vq + (m\Sigma VaS.VbVq + m\Sigma VbS.VaVq +$$
$$+ m\Sigma VcS.VeVq - \beta S.\alpha Vq) = mVd - \beta Sd.$$

Jedes Glied des zwischen Klammern eingeschlossenen Ausdrucks ist von der Form $\alpha_k S.\beta_k Vq$, wo α_k, β_k Vektoren bedeuten. Die zweite Seite der Gleichung ist ein Vektor, $m(k+\gamma)$ ein willkürlicher Quaternion. Setzt man noch

$$Vq = \rho \; \dots\dots\dots\dots \; (f. 14)$$

so ist die Gleichung $(f. 13)$ von der Form

$$Vr\rho + \Sigma\alpha_k S\beta_k\rho = \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 15)$$

wo r einen willkürlichen Quaternion bedeutet. Das Zeichen Σ hat Bezug auf die Verschiedenheit der Gröszen α_k, β_k.

Der ersten Seite der Gleichung ($f.$ 15) ist von HAMILTON der Name einer linearen Vektorfunktion eines Vektors beigelegt worden, und bei den späteren Untersuchungen ist diese Funktion mit $\Phi\rho$ bezeichnet. Der Definition nach ist deshalb

$$\Phi\rho = Vr\rho + \Sigma\alpha_k S\beta_k\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 16)$$

In diesem Symbole bedeutet Φ ein Operationszeichen an den Vektor ρ wirkend, und wir wollen im Folgenden stets annehmen, der Operator Φ wirke an den rechts von demselben stehenden Vektor, so dass $\Phi V\lambda\mu$ das Resultat der Operation Φ an den Vektor $V\lambda\mu$ bedeutet.

Soll dieses Resultat durch einen neuen Vektor oder durch einen Quaternion q multiplicirt werden, so wollen wir dies wie nachstehend schreiben

$$\Phi V\lambda\mu.q.$$

Jedoch sei unter $\Phi\rho\Phi\sigma$ ohne weiteres das Produkt der Vektoren $\Phi\rho$ und $\Phi\sigma$ verstanden.

Wenn Φ an eine Summe von Vektoren operirt, so wird dieselbe zwischen Klammern gesetzt.

Der Deutlichkeit halber kann auch bisweilen, wenn ρ eine verwickelte Gestalt hat, anstatt $\Phi\rho$ das Zeichen $\Phi(\rho)$ geschrieben werden.

137. Es gilt zunächst die Gleichung ($f.$ 15) oder

$$\Phi\rho = \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 17)$$

aufzulösen. Die Lösung stellt HAMILTON wie nachstehend dar

$$\rho = \Phi^{-1}\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 18)$$

und es ist diese Gleichung als die Definition des Operators Φ^{-1} zu betrachten.

138. Die Funktion Φ hat einige wichtigen Eigenschaften

1°. $$\Phi(\rho + \sigma + \ldots) = \Phi\rho + \Phi\sigma + \quad \ldots\ldots\ldots (f.\ 19)$$

denn es ist

$$V.r(\rho + \sigma + \ldots) = V(r\rho + r\sigma + \ldots) = Vr\rho + Vr\sigma + \ldots$$

und

$$\alpha_k S.\beta_k(\rho + \sigma + \ldots) = \alpha_k S(\beta_k\rho + \beta_k\sigma + \ldots) = \alpha_k(S\beta_k\rho + S\beta_k\sigma + \ldots)$$
$$= \alpha_k S\beta_k\rho + \alpha_k S\beta_k\sigma + \ldots$$

Es kann diese Eigenschaft auch als Definition der linearen Vektorfunktion gewählt werden.

2°. $\Phi x\rho = x\Phi\rho, \ldots\ldots\ldots\ldots$ (*f.* 20)

wenn x skalar ist. Dies folgt unmittelbar aus dem vorigen Satze.

3°. $d\Phi\rho = \Phi d\rho \ldots\ldots\ldots\ldots$ (*f.* 21)

Es ist nämlich:

$$d\Phi\rho = Lim. n\left[\Phi\left(\rho + \frac{d\rho}{n}\right) - \Phi\rho\right] = Lim. n\left[\Phi\rho + \Phi\frac{d\rho}{n} - \Phi\rho\right] \text{nach } (f. 19)$$

$$= Lim.\, n\, \Phi\, \frac{d\rho}{n} = \Phi d\rho \text{ nach } (f. 20).$$

Analoge Eigenschaften sind auch bei der Funktion Φ^{-1} gültig.

Es folgt nämlich aus (*f.* 19)

$$\rho + \sigma + \ldots. = \Phi^{-1}[\Phi\rho + \Phi\sigma + \ldots.].$$

Wenn nun

$$\Phi\rho = \delta,\ \Phi\sigma = \varepsilon \text{ u. s. w.}$$

so ist

$$\rho = \Phi^{-1}\delta,\ \sigma = \Phi^{-1}\varepsilon \text{ u. s. w.}$$

und indem diese Resultate in die zuletzt erhaltene Gleichung eingeführt werden:

$$\Phi^{-1}\delta + \Phi^{-1}\varepsilon + \ldots. = \Phi^{-1}(\delta + \varepsilon + \ldots.) \ldots \quad (f. 22)$$

Diese Gleichung spricht aus, dass auch die Funktion Φ^{-1} eine lineare Vektorfunktion ist.

Aus derselben ist weiter herzuleiten, wie bei der Funktion Φ geschehen,

$$\Phi^{-1}x\delta = x\Phi^{-1}\delta,\ d\Phi^{-1}\delta = \Phi^{-1}d\delta. \ldots\ldots \quad (f. 23)$$

139. Wie die Gleichung (*f.* 17) aussagt, oder auch die Definitionsgleichung (*f.* 16), ist $\Phi\rho$ ein Vektor, nämlich δ.

Man kann somit auf diesen Vektor aufs neue die Operation Φ anwenden; das Resultat, welches wir mit $\Phi\Phi\rho$ oder kürzer mit $\Phi^2\rho$ bezeichnen wollen, ist ein neuer Vektor. Auf denselben können wir wieder die Operation Φ anwenden und erhalten dadurch den Vektor $\Phi^3\rho$, u. s. w.

Dergleichen Betrachtungen lassen sich bei der Funktion Φ^{-1} durchführen.

Nach der Definitionsgleichung (*f.* 18) ist $\Phi^{-1}\delta$ ein Vektor. Wenn wir daher an diesen aufs neue mit dem Symbol Φ^{-1}

operiren, so wird das Resultat ein neuer Vektor $\Phi^{-1}\Phi^{-1}\delta$ sein, den wir mit $\Phi^{-2}\delta$ bezeichnen, u. s. w.

Es wird hierdurch die Bedeutung der Symbole $\Phi^k\rho$, $\Phi^{-l}\delta$, wo k und l ganze arithmetische Zahlen sind, ohne weiteres einleuchten.

Den Definitionen zufolge gelten nun die beiden nachstehenden Gleichungen.

$$\Phi^k\Phi^l\rho = \Phi^{k+l}\rho \text{ und } \Phi^{-k}\Phi^{-l}\delta = \Phi^{-k-l}\delta \quad \ldots \ldots (f. 24)$$

Weiter ist

$$\Phi\Phi^{-1}\delta = \Phi\rho = \delta, \quad \Phi^{-1}\Phi\rho = \Phi^{-1}\delta = \rho \quad \ldots \ldots (f. 24^*)$$

Die Funktionen

$$\Phi^2\rho, \; \Phi^3\rho \ldots, \; \Phi^k\rho \ldots$$

und ebenfalls

$$\Phi^{-2}\rho, \; \Phi^{-3}\rho \ldots \Phi^{-k}\rho \ldots$$

werden den Definitionen zufolge lineare Vektorfunktionen sein müssen; es gelten für dieselben, wie leicht nachgewiesen wird, die Eigenschaften durch ($f.$ 19), ($f.$ 22) ausgesprochen. Die beiden letzteren Gleichungen können leicht verallgemeinert werden, und man erhält in dieser Weise die beiden nachstehenden Relationen:

$$\Phi^k\Phi^{-k}\delta = \delta, \quad \Phi^{-l}\Phi^l\rho = \rho \quad \ldots \ldots \ldots (f. 25)$$

für alle ganze arithmetische Werte von k, l. Denn es ist

$$\Phi^k\Phi^{-k}\delta = \Phi^{k-1}\Phi\Phi^{-1}\Phi^{-(k-1)}\delta \text{ nach } (f. 24)$$
$$= \Phi^{k-1}\Phi^{-(k-1)}\delta \text{ nach } (f. 24^*)$$

Man kann daher den Index k jedesmal um eins verringern, bis man auf ($f.$ 24*) kommt.

Weiter kann hieraus gefolgert werden

$$\left.\begin{aligned} \Phi^k\Phi^{-l}\delta &= \Phi^{k-l}\delta \text{ wenn } k > l \\ \text{und} \quad &= \Phi^{-(l-k)}\delta \text{ wenn } k < l \\ \Phi^{-k}\Phi^l\rho &= \Phi^{l-k}\rho \text{ wenn } k < l \\ \text{und} \quad &= \Phi^{-(k-l)}\rho \text{ wenn } k > l \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (f. 26)$$

Wir wollen die vier zuletzt geschriebenen Gleichungen nicht alle beweisen. Wir nehmen nur z. B. für den Fall $k > l$

$$\Phi^k\Phi^{-l}\delta = \Phi^{k-l}\Phi^l\Phi^{-l}\delta \text{ nach } (f. 24) = \Phi^{k-l}\delta \text{ nach } (f. 25);$$

für den Fall $k < l$

$\Phi^k\Phi^{-l}\delta = \Phi^k\Phi^{-k}\Phi^{-(l-k)}\delta$ nach (*f.* 24) $= \Phi^{-(l-k)}\delta$ nach (*f.* 25)

Man ersieht unmittelbar, dass die Gleichungen (*f.* 26) sich zu zweien zusammenziehen lassen.

140. Es gibt eine bestimmte Funktion, welche HAMILTON in dieser Theorie mit $\Phi'\rho$ bezeichnet, welche zu $\Phi\rho$ in einer gewissen Beziehung steht, und bei der Auflösung der linearen Gleichung eine wichtige Rolle spielt. Mit derselben wollen wir uns in diesem Artikel beschäftigen. Um zu ihrer Definition zu geraten, fangen wir damit an $S.\sigma\Phi\rho$ zu transformiren, wo σ einen neuen Vektor bedeutet. Wir erhalten, indem wir auf die Gleichung (*f.* 16) achten:

$$S.\sigma\Phi\rho = S.\sigma Vr\rho + \Sigma S.\sigma\alpha_k S\beta_k\rho,$$

wo das Zeichen Σ auf die Indices k Bezug nimmt. Weiter wird nun

$$\begin{aligned} S.\sigma Vr\rho &= S.\sigma r\rho, \text{ weil } S.\sigma Sr\rho = 0 \\ &= S.\sigma(Sr + Vr)\rho = SrS\sigma\rho + S.\sigma(Vr)\rho \\ &= SrS\rho\sigma - S.\rho(Vr)\sigma, \text{ nach } (c.\ 39) \\ &= S.\rho(Sr)\sigma - S.\rho(Vr)\sigma = S.\rho(Kr)\sigma \end{aligned}$$

$$S.\sigma\alpha_k S\beta_k\rho = S\beta_k\rho S\sigma\alpha_k \text{ nach } (b.\ 102) = S\rho\beta_k S\alpha_k\sigma \text{ nach } (c.\ 16) = \\ = S.\rho\beta_k S\alpha_k\sigma.$$

Und hierdurch wird schlieszlich

$$S.\sigma\Phi\rho = S.\rho(Kr)\sigma + \Sigma S.\rho\beta_k S\alpha_k\sigma \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 27)$$

Die im Anfange dieses Artikels erwähnte Funktion $\Phi'\rho$ definiren wir nun durch die Gleichung

$$\Phi'\rho = V.(Kr)\rho + \Sigma\beta_k S\alpha_k\rho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 28)$$

Es entsteht somit die Funktion Φ' aus Φ, indem der Quaternion r durch dessen Conjugirten ersetzt und die Symbole α_k, β_k mit einander umgetauscht werden. Die Gleichung (*f.* 27) lässt sich nun aber auch in die nachfolgende Gestalt schreiben

$$S.\sigma\Phi\rho = S.\rho\Phi'\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 29)$$

und diese Gleichung spricht die wichtigste Eigenschaft der Funktion Φ' aus. Wir werden diese Relation im weiteren oftmals anwenden.

HAMILTON nennt die Funktion Φ' die conjugirte der Funktion Φ.

141. Es mögen in diesem Artikel einige weiteren Eigenschaften der conjugirten Funktion Platz finden.

Die conjugirte der conjugirten Funktion ist die ursprüngliche Funktion Φ. Denn es ist $KKr = \gamma$, und die neue Vertauschung der α_k, β_k führt diese Gröszen an ihre ursprünglichen Stellen zurück.

Die conjugirte der Funktion $\Phi + \Phi'$ ist die Funktion selbst, weil durch die Umänderungen Φ in Φ' und Φ' in Φ übergeht. Mann nennt deshalb $\Phi + \Phi'$ eine selbstconjugirte Funktion.

Wenn man in der Gleichung (f. 29) $\sigma = \rho$ annimmt, so wird erhalten

$$S.\rho\Phi\rho = S.\rho\Phi'\rho \text{ oder } S.\rho[\Phi\rho - \Phi'\rho] = 0.$$

Wenn wir noch $(\Phi - \Phi')\rho$ statt $\Phi\rho - \Phi'\rho$ einführen, so ist

$$S.\rho[\Phi - \Phi')\rho = 0.$$

Weil $\Phi\rho$ und $\Phi'\rho$ Vektoren sind, so ist ihre Differenz ebenfalls ein Vektor. Nach (c. 29) erhalten wir nun den Satz:

Der Vektor $(\Phi - \Phi')\rho$ ist stets senkrecht zu ρ.

Weil $\Phi'\rho$ ein Vektor ist, so hat der Ausdruck $\Phi\Phi'\rho$ auch einen Sinn.

Es ist ein Leichtes darzutun, dass die Funktion $\Phi\Phi'$ selbstconjugirt ist.

Denn man erhält

$$\begin{aligned} S.\rho\Phi\Phi'\sigma &= S.\rho\Phi[\Phi'\sigma] \text{ nach unserer Annahme,} \\ &= S.\Phi'\sigma\Phi'\rho \text{ nach } (f.\ 29) = S.\Phi'\rho\Phi'\sigma \text{ nach } (c.\ 16) \\ &= S.\sigma\Phi[\Phi'\rho] \text{ nach } (f.\ 29) = S.\sigma\Phi\Phi'\rho \end{aligned}$$

Wenn unter x eine Skalargrösze verstanden wird, so kann an einen Vektor ρ die Operation $\Phi + x$ vollzogen werden, indem wir setzen

$$(\Phi + x)\rho = \Phi\rho + x\rho$$

und das Resultat ist aufs neue eine lineare Vektorfunktion.

Es ist sodann weiter:

$$\begin{aligned} S.\sigma(\Phi + x)\rho = S.\sigma[\Phi\rho + x\rho] = S.\sigma\Phi\rho + S\sigma x\rho = \\ = S.\rho\Phi'\sigma + xS.\rho\sigma = S.\rho(\Phi' + x)\sigma \end{aligned}$$

oder kurz

$$S.\sigma(\Phi + x)\rho = S.\rho(\Phi' + x)\,\sigma \quad \ldots \ldots \ldots \quad (f.\ 30)$$

Hieraus erhellt, dass die Funktion $\Phi' + x$ die conjugirte der Funktion $\Phi + x$ ist.

142. Hamilton hat eine allgemeine Methode angegeben die

lineare Vektorgleichung ($f.$ 17) aufzulösen. Es wird hierdurch bei jeder linearen Quaterniongleichung der Vektorteil des unbekannten Quaternions bestimmt. Nachher kann mit Hülfe der Gleichung ($f.$ 10) oder auch der Gleichung ($f.$ 13) der Skalarteil bestimmt werden, wodurch das Problem der Auflösung der allgemeinen linearen Gleichung Schwierigkeiten zu bieten nicht mehr im Stande ist.

In den nachfolgenden Artikeln wollen wir die HAMILTONsche Methode darstellen.

143. Wir wählen zwei ganz willkürliche Vektoren λ, μ und bilden mit Hülfe derselben den neueu Vektor $IV\lambda\mu$ oder kurz $V\lambda\mu$. Wie im dritten Abschnitte dargetan ist, ist der Vektor $V\lambda\mu$ senkrecht zu λ und μ beiden, oder in Formeln

$$S.\lambda V\lambda\mu = 0 \text{ nach Art. 88, } S.\mu V\lambda\mu = 0. \;.\;. \;(f.\ 31)$$

Somit können wir nach ($f.$ 24*) auch schreiben:

$$S.\lambda\Phi\Phi^{-1} V\lambda\mu = 0\,,\ S.\mu\Phi\Phi^{-1} V\lambda\mu = 0. \;.\;.\;. \;(f.\ 31^*)$$

und indem man auf jede der beiden ersten Seiten dieser Relationen die Gleichung ($f.$ 29) anwendet, erhält man

$$S[\Phi^{-1} V\lambda\mu.\Phi'\lambda] = 0\,,\ S[\Phi^{-1} V\lambda\mu.\Phi'\mu] = 0\,,$$

woraus wir schlieszen können, dass der Vektor $\Phi^{-1} V\lambda\mu$ senkrecht zu den beiden anderen $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$ ist. Dieselbe Eigenschaft besitzt jedoch auch der Vektor $V.\Phi'\lambda\Phi'\mu$, sodass die beiden Vektoren

$$\Phi^{-1} V(\lambda\mu)\,,\ V.\Phi'(\lambda)\Phi'(\mu)$$

der Richtung nach zusammenfallen müssen. Man kann daher setzen

$$x\Phi^{-1} V\lambda\mu = V.\Phi'\lambda\Phi'\mu. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(f.\ 32)$$

wenn x ein Skalar ist.

Wir können weiter einen dritten, mit den beiden vorigen λ, μ nicht complanaren Vektor ν wählen und $\Phi'\nu$ bilden. Wenn wir die beiden Seiten der Gleichung ($f.$ 32) mit $\Phi'\nu$ multipliciren und die Skalarteile nachher einander gleich setzen, so wird erhalten

$$xS.\Phi'\nu\Phi^{-1} V\lambda\mu = S[\Phi'\nu.V\Phi'\lambda\Phi'\mu]. \;.\;.\;.\;.\;. \;(f.\ 33)$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung können ohne Schwierigkeit transformirt werden. Wir nehmen jede für sich

$S.\Phi'\nu\Phi^{-1}V\lambda\mu = S.\Phi^{-1}V\lambda\mu\Phi'\nu$ nach ($c.$16) $= S.\nu\Phi[\Phi^{-1}V\lambda\mu]$ nach ($f.$29)
$= S.\nu V\lambda\mu$, nach ($f.$ 24*) $= S.\nu\lambda\mu = S\lambda\mu\nu$
$S[\Phi'\nu . V\Phi'\lambda\Phi'\mu] = S.\Phi'\nu\Phi'\lambda\Phi'\mu$, weil $\Phi'\nu . S\Phi'\lambda\Phi'\mu$ ein Vektor ist,
$= S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu$.

Wenn man diese Werte in die Gleichung ($f.$ 32) einführt, erhält man

$$x = \frac{S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu}{S.\lambda\mu\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 34)$$

144. Es sind hierin λ, μ, ν drei ganz willkürliche Vektoren. Hat man eine bestimmte Wahl gemacht und wählt man nachher drei andere Vektoren α, β, γ, so müssen die beiden Resultate für x übereinstimmen. Es ist dies leicht zu zeigen; die beiden Funktionen $S.\lambda\mu\nu$, $S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu$ besitzen nämlich Invariantencharakter, wie wir dartun wollen.

Nach Art. 22 oder nach Art. 88 kann man nämlich jeden beliebigen Vektor in drei anderen nicht complanaren linear ausdrücken. Wir setzen deshalb

$$\lambda = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma,\ \mu = a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma,\ \nu = a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma \quad (f.\ 35)$$

wo a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, Skalare sind, und wenden diese Substitution bei dem Zähler und dem Nenner der zweiten Seite der Gleichung ($f.$ 34) an.

Es wird sodann

$$\Phi'\lambda = \Phi'(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma) = \Phi'(a_1\alpha) + \Phi'(b_1\beta) + \Phi'(c_1\gamma) \text{ nach } (f.\ 19)$$

oder

$$\Phi'\lambda = a_1\Phi'\alpha + b_1\Phi'\beta + c_1\Phi'\gamma, \text{ nach } (f.\ 20) \ldots (f.\ 36)$$

Die Funktion Φ' besitzt nämlich, wie unmittelbar einleuchten musz, die im Art. 138 mitgeteilten Eigenschaften der Funktion Φ.

Es folgt aus der Gleichung ($f.$ 36) für $\Phi'\lambda$, der sich zwei analoge Relationen für $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ anschlieszen, dass diese Funktionen nach denselben Formeln transformirt werden, wie die Gröszen λ, μ, ν. Die Transformation einer der beiden Gröszen $S.\lambda\mu\nu$, $S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu$ macht somit auch die der anderen bekannt.

Nach einiger Rechnung findet man leicht

$$S.\lambda\mu\nu = S.(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma)(a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma)(a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma) =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} S.\alpha\beta\gamma.$$

Durch die Substitution (*f.* 35) werden demnach Zähler und Nenner des Ausdruckes für x mit derselben Grösze, der Substitutionsdeterminante multiplicirt. Der Wert der Grösze x bleibt daher ungeändert, wie zu beweisen war.

145. Wir wollen nun die HAMILTONsche Lösungsmethode weiter auseinandersetzen und kehren wieder zu den beiden Gleichungen (*f.* 31) zurück. Statt derselben können wir auch die beiden nachstehenden setzen

$$S.\lambda(\phi+m)[(\phi+m)^{-1}V\lambda\mu]=0,\quad S.\mu(\phi+m)[(\phi+m)^{-1}V\lambda\mu]=0,$$

wo m eine Skalargrösze ist, und das Symbol $(\phi+m)^{-1}$ in gleicher Weise wie ϕ^{-1} gedeutet werden soll.

Wendet man nun bei jeder dieser Relationen die Gleichung (*f.* 30) an, so lassen sich dieselben wie die Relationen (*f.* 31*) transformiren und man schlieszt daraus, dass eine Gleichung von der Form (*f.* 32) auch für die Funktion $\phi+m$ gültig sein musz. Nennt man x_m den Wert, welchen die Grösze x der Gleichung (*f.* 32) für diesen Fall erhält, so gilt demnach:

$$x_m(\phi+m)^{-1}V\lambda\mu=V.(\phi'+m)\lambda(\phi'+m)\mu.\ .\ .\ (f.\ 37)$$

Die zweite Seite dieser Gleichung wollen wir zuerst transformiren

$$\begin{aligned}V.(\phi'+m)\lambda(\phi'+m)\mu &= V.[\phi'\lambda+m\lambda][\phi'\mu+m\mu]\\ &= V.[\phi'\lambda\phi'(\mu)+m\}\lambda\phi'\mu+\phi'\lambda.\mu\{+m^2\lambda\mu]\\ &= V.\phi'\lambda\phi'\mu+m\,V\}\lambda\phi'\mu+\phi'\lambda.\mu\{+m^2\,V\lambda\mu\end{aligned}$$

Bezeichnen wir der Kürze halber den Vektor

$$V\}\lambda\phi'\mu+\phi'\lambda.\mu\{\ \text{mit}\ \psi,$$

so ist

$$\begin{aligned}S.\lambda\psi=S.\lambda\}\lambda\phi'\mu+\phi'\lambda.\mu\{&=S[\lambda\phi'\lambda.\mu],\ \text{weil}\ \lambda^2\phi'\mu\ \text{ein Vektor ist,}\\ &=-S.\lambda\mu\phi'\lambda\ \text{nach}\ (c.\ 39)=-S.(V\lambda\mu)\phi'\lambda=\\ &=-S.\lambda\phi\,V\lambda\mu\ \text{nach}\ (f.\ 29)\end{aligned}$$

$$S.\mu\psi=S.\mu\}\lambda\phi'\mu+\phi'\lambda.\mu\{=S.\mu\lambda\phi'\mu+S[\mu\phi'\lambda.\mu]=-S.\lambda\mu\phi'(\mu),$$

weil nach (*c.* 39)

$$S[\mu\phi'\lambda.\mu]=-S.\mu^2\phi'\lambda=0.$$

Es wird nun weiter:

$$S.\mu\psi=-S.(V\lambda\mu)\phi'\mu=-S.\mu\phi\,V\lambda\mu.$$

Man kann nach den hier erhaltenen Resultaten somit auch schreiben

$$S.\lambda[\psi + \phi V\lambda\mu] = 0\,, \quad S.\mu[\psi + \phi V\lambda\mu] = 0,$$

woraus nach (c. 29) geschlossen wird, dass der Vektor $\psi+\phi V\lambda\mu$ senkrecht zu λ, μ beiden ist, und deshalb der Richtung nach mit $V\lambda\mu$ zusammenfällt. Es kann daher gesetzt werden

$$\psi + \phi V\lambda\mu = a V\lambda\mu \quad \text{oder} \quad \psi = (a - \phi) V\lambda\mu$$

wo a ein Skalar ist. Wir sind somit berechtigt die Grösze ψ oder

$$V\{\lambda\phi'\mu + \phi'\lambda.\mu\}$$

als eine Funktion $\psi V\lambda\mu$ des Vektors $V\lambda\mu$ allein zu betrachten.

Die zweite Seite der Gleichung (f. 37), welche in die Form geraten war

$$V.\phi'\lambda\phi'\mu + m V\{\lambda\phi'\mu + \phi'\lambda.\mu\} + m^2 V\lambda\mu$$

kann nun weiter transformirt werden. Indem man die Gleichung (f. 32) beachtet, wird erhalten

$$x\phi^{-1} V\lambda\mu + m\psi V\lambda\mu + m^2 V\lambda\mu \quad \text{oder} \quad (x\phi^{-1} + m\psi + m^2) V\lambda\mu$$

in symbolischer Gestalt. Anstatt (f 37) wird somit gelten

$$x_m(\phi + m)^{-1} V\lambda\mu = (x\phi^{-1} + m\psi + m^2)\ V\lambda\mu \quad .\ .\ (f.\ 38)$$

und wenn man jetzt an die beiden Seiten dieser Gleichung mit dem Symbol $\phi + m$ operirt, entsteht

$$x_m V\lambda\mu = (\phi + m)\,(x\phi^{-1} + m\psi + m^2) V\lambda\mu$$

oder

$$x_m V\lambda\mu = [x + m(\phi\psi + x\phi^{-1}) + m^2(\phi + \psi) + m^3]\, V\lambda\mu. \quad (f.\ 39)$$

Wenn man jedoch bei der Gleichung (f. 37) wie bei (f. 32) verfahren hätte, somit dieselbe unmittelbar mit $(\phi + m)\nu$ multiplicirt und die Skalarteile der beiden Seiten einander gleich gesetzt hätte, so wäre erhalten

$$x_m = \frac{S.(\phi' + m)\lambda\ (\phi' + m)\mu\ (\phi' + m)\nu}{S.\lambda\mu\nu} \quad .\ .\ .\ .\ (f.\ 40)$$

analog der Gleichung (f. 34)

Es ist der Zähler dieser Ausdrucks der Bedeutung nach

$$= S\,(\phi'\lambda + m\lambda)\,(\phi'\mu + m\mu)\,(\phi'\nu + m\nu)$$
$$= S.\phi'\lambda\phi'\mu\phi'\nu + mS.\{\lambda\phi'\mu\phi'\nu + \mu\phi'\nu\phi'\lambda + \nu\phi\lambda\phi'\mu\}$$
$$+ m^2 S.\{\mu\nu\phi'\lambda + \nu\lambda\phi'\mu + \lambda\mu\phi'\nu\} + m^3 S.\lambda\mu\nu$$

und es erhellt hieraus, dass dieser Zähler wieder Invariantencharakter besitzt.

Setzen wir noch:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{S.[\lambda\phi'\mu\phi'\nu + \mu\phi'\nu\phi'\lambda + \nu\phi'\lambda\phi'\mu]}{S.\lambda\mu\nu}, \\ x_2 &= \frac{S.[\mu\nu\phi'\lambda + \nu\lambda\phi'\mu + \lambda\mu\phi'\nu]}{S.\lambda\mu\nu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (f.\,41)$$

so werden x_1, x_2, bei der Änderung der Vektoren λ, μ, ν denselben Wert behalten.

Die Gleichung (f. 40) geht nun weiter über in

$$x_m = x + mx_1 + m^2x_2 + m^3 \ldots\ldots (f.\,42)$$

Die Vergleichung dieses Resultats mit der Gleichung (f. 39) liefert eine Relation, in der m alle möglichen Werte erhalten kann. Dieselbe kann somit nur bestehen, wenn die Coefficienten der gleichen Potenzen der Grösze m einander gleich sind, wodurch das System der symbolischen Gleichungen erhalten wird

$$\phi\psi + x\phi^{-1} = x_1\,,\ \phi + \psi = x_2 \ldots\ldots (f.\,43)$$

Die zweite dieser Gleichungen stimmt mit einer vorher für die Funktion ψ hergeleiteten Relation überein; nur erscheint hier die ganz bestimmte Skalargrösze x_2, während in der vorhergehenden Relation ein unbestimmter Skalar a sich vorfand. Man findet hieraus

$$\psi = x_2 - \phi \ldots\ldots (f.\,44)$$

Die Elimination der Funktion ψ zwischen den beiden Gleichungen (f. 43) führt zu einer Beziehung, welche für die Theorie der Auflösung der linearen Gleichungen die gröszte Wichtigkeit hat, weil dieselbe die Auflösung, wie wir bald ersehen werden, in sich schlieszt. Es ergibt sich durch jene Elimination:

$$x\phi^{-1} - x_1 + x_2\phi - \phi^2 = 0. \ldots\ldots (f.\,45)$$

Nun war jedoch unsrer Voraussetzung gemäsz

$$\rho = \phi^{-1}\delta$$

die Auflösung der gegebenen Gleichung. Lässt man in (f. 45) die Symbole an den Vektor δ wirken, so ist

$$x\phi^{-1}\delta = x_1\delta - x_2\,\phi\delta + \phi^2\delta \ldots\ldots (f.\,46)$$

und demgemäsz

$$x\rho = x_1\delta - x_2\phi\delta + \phi^2\delta \ldots\ldots (f.\,47)$$

wodurch ρ gefunden ist.

146. Durch die Gleichung (*f.* 46) wird die umgekehrte Operation Φ^{-1} in der direkten Operation Φ ausgedrückt. Zumeist aber wird dieser Gleichung und der ursprünglicheren Relation (*f.* 45) eine andre Gestalt erteilt. Vollzieht man nämlich an (*f.* 45) die Operation Φ und beachtet man, dass $\Phi(0)$ der Bedeutung nach verschwindet, so erhält man mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Funktion Φ in Art. 138

$$x - x_1\Phi + x_2\Phi^2 - \Phi^3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 48)$$

Man pflegt somit zu sagen, die Funktion Φ genüge einer bestimmten symbolischen kubischen Gleichung. Es ist dieselbe von HAMILTON ausführlich diskutirt worden, wie auch die oben eingeführte Funktion ψ und eine andere dazu in Beziehung stehende, welche wir nicht benutzt haben. Auf diese Diskussion wollen wir nicht weiter eingehen; nur seien einige speciellen Fälle erörtert.

147. Die für die Gröszen x, x_1, x_2 angegebenen Werte (*f.* 34) (*f.* 41) haben den gemeinschaftlichen Nenner $S.\lambda\mu\nu$, welcher nach unsrer Voraussetzung, es seien λ, μ, ν nicht complanar, niemals verschwinden kann. Wenn ausserdem $T\lambda$, $T\mu$, $T\nu$ endlich sind, so kann nach (*c.* 36) $S.\lambda\mu\nu$ auch nicht ins Unendliche wachsen. Es kann somit der Fall nicht eintreten, dass x, x_1, x_2 unbestimmt würden.

Verschwinden jedoch kann eine oder können mehrere dieser Gröszen wohl. Wir wollen zunächst den Fall betrachten, wo x der Null gleich wird. Es erfordert dies, dass $S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu$ verschwindet, oder nach (*c.* 37), dass die Vektoren $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ complanar sind. Es besteht somit ein Vektor π, welcher zu den drei vorigen senkrecht ist; nach (*c.* 28) soll sodann

$$S.\pi\Phi'\lambda = 0,\ S.\pi\Phi'\mu = 0,\ S.\pi\Phi'\nu = 0$$

oder nach (*f.* 29)

$$S.\lambda\Phi\pi = 0,\ S.\mu\Phi\pi = 0,\ S.\nu\Phi\pi = 0 \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 49)$$

148. Wir wollen nun aber zeigen, dass ein Vektor α, welcher drei Bedingungen von der Form

$$S.\lambda\alpha = 0,\ S.\mu\alpha = 0,\ S.\nu\alpha = 0 \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 50)$$

genügt, wo λ, μ, ν drei willkürliche nicht complanare Vektoren bedeuten, notwendig verschwinden musz; ein Satz, welcher nachher sich noch nützlich erweisen wird.

Wenn α nicht verschwände, so würden die drei Gleichungen ($f.$ 50) aussagen, dass α zu den drei Vektoren λ, μ, ν senkrecht steht, und dies ist offenbar unmöglich.

149. Nach dem vorigen Artikel kann aus ($f.$ 49) geschlossen werden, dass $\Phi\pi$ verschwindet. Der Vektor π, welchen wir in Art. 147 einführten, soll somit der Gleichung genügen

$$\Phi\pi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 51)$$

Aus der Form der Funktion Φ schlieszt man unmittelbar, dass wenn π der Gleichung ($f.$ 51) genügt, dasselbe ebenfalls von $y\pi$ gelten musz, wo y skalar ist. Den Einheitsvektor, welcher der Gleichung ($f.$ 51) Genüge leistet, wollen wir $U\pi$ nennen; es ist sodann allgemein $yU\pi$ eine Lösung jener Gleichung.

Weil $V.\Phi'\lambda\Phi'\mu$ ein zu den beiden Vektoren $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$ senkrechter Vektor ist, so musz derselbe der Richtung nach mit $U\pi$ zusammenfallen. Man kann deshalb in diesem Falle setzen

$$V.\Phi'\lambda\Phi'\mu = yU\pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 52)$$

wo der Wert der Grösze y mit der Wahl der Vektoren λ, μ sich ändert.

150. Die Gleichung ($f.$ 32) verliert in diesem Falle seine Bedeutung; an ihre Stelle tritt die Beziehung ($f.$ 52) und mit derselben kann nun leicht die Auflösung weiter verfolgt werden.

Wenn wir nun nämlich in diesem Falle wie in Art. 145 verfahren, so bleiben alle dort erhaltenen Formeln bestehen; nur wird das Resultat der Transformation der zweiten Seite der Gleichung ($f.$ 37)

$$yU\pi + (m\psi + m^2)V\lambda\mu$$

und somit geht die Gleichung ($f.$ 38) in die nachstehende über

$$x_m(\Phi + m)^{-1}V\lambda\mu = yU\pi + (m\psi + m^2)V\lambda\mu \quad . . \quad (f.\ 53)$$

An dieses Resultat wollen wir nun mit dem Symbole $\Phi + \mu$ operiren.

Wenn dabei die Gleichung ($f.$ 51) beachtet wird, so ergibt sich dadurch

$$x_m V\lambda\mu = myU\pi + [m\Phi\psi + m^2(\Phi + \psi) + m^3]V\lambda\mu \quad . \quad (f.\ 54)$$

Es geht weiter ($f.$ 42) über in:

$$x_m = mx_1 + m^2x_2 + m^3,$$

wo die Symbole an jeden beliebigen Vektor operiren können. Wenn man hierzu $V\lambda\mu$ wählt und das Resultat mit der Gleichung (*f.* 54) verbindet, so entspringt hieraus das System der Gleichungen:

$$x_1 V\lambda\mu = y U\pi + \Phi\psi V\lambda\mu, \quad x_2 V\lambda\mu = (\Phi + \psi) V\lambda\mu.$$

Der Wert des Skalars y ist von der Wahl der Vektoren λ, μ abhängig und soll nach (*f.* 52) bestimmt werden:

$$y = TV.\Phi'\lambda\Phi'\mu.$$

Nun kann aber dargetan werden, dass $V.\Phi'\lambda\Phi'\mu$ eine Funktion der Grösze $V\lambda\mu$ ist. (Man sehe Art. 181.) Setzt man statt $V\lambda\mu$ einen willkürlichen Vektor σ, so ist in den vorhergehenden Gleichungen der Wert von y durch die für σ getroffene Wahl bestimmt, und dieselben gehen über in

$$x_1\sigma = y U\pi + \Phi\psi\sigma, \quad x_2\sigma = (\Phi + \psi)\sigma \quad \dots \quad (f.\ 55)$$

und indem nunmehr ψ eliminirt wird, erhält man

$$x_1\sigma - x_2\Phi\sigma + \Phi^2\sigma = y U\pi \quad \dots\dots\dots \quad (f.\ 56)$$

In dieser Gleichung wollen wir nun noch $\Phi^{-1}\delta$ statt σ einführen. Es entsteht sodann

$$x_1\Phi^{-1}\delta = x_2\delta - \Phi\delta + y U\pi$$

und die gesuchte Lösung der linearen Gleichung wäre somit

$$x_1\rho = x_2\delta - \Phi\delta + y U\pi \quad \dots\dots\dots \quad (f.\ 57)$$

Es erscheint hier ρ ausgedrückt mittelst δ, $U\pi$ und eines bestimmten Skalars y. Man ersieht aber leicht, dass man diesem letzteren jeden beliebigen Wert beilegen kann. Denn nennt man den Wert von ρ aus (*f.* 57) ρ_1, so wissen wir dass derselbe der gegebenen linearen Gleichung genügt. Es ist daher

$$\Phi\rho_1 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (f.\ 58)$$

Nun ist weiter

$\Phi(\rho_1 + n U\pi) = \Phi\rho_1 + n\Phi(U\pi)$ nach (*f.* 19) $= 0$ nach (*f.* 58), (*f.* 51)

und hieraus schlieszt man, dass auch $\rho_1 + n U\pi$, wo n einen beliebigen Skalar bedeutet, der gegebenen Gleichung genügt.

Die Lösung der Vektorgleichung ist daher (*f.* 57), wenn darin y einen neuen willkürlichen Skalarcoefficienten bedeutet.

151. Wenn auszer $x = 0$ auch $x_1 = 0$ stattfindet, so kann man in der Gleichung (*f.* 56), welche für diesen Fall in

$$x_2\Phi\sigma - \Phi^2\sigma = - y U\pi. \quad \dots\dots\dots \quad (f.\ 59)$$

übergegangen ist, $\phi^{-2}\delta$ statt σ schreiben und erhält dadurch schlieszlich

$$x_2\rho = \delta + yU\pi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 60)$$

152. In den vorhergehenden Artikeln ist die allgemeine Hamiltonsche Methode der Lösung linearer Gleichungen kurz erörtert. Dieselbe erfordert, wie daraus ersichtlich, zuerst die Bestimmung der drei Skalarcoefficienten x, x_1, x_2 nach den Gleichungen ($f.$ 34), ($f.$ 41). Es ist dies meistens eine ziemlich weitläufige Berechnung und es verdient daher den Vorzug, dieselbe auf einfachere Weise zu bestimmen.

Dieser Weg besteht darin, dass in der allgemeinen Formel ($f.$ 48) oder

$$x - x_1\phi + x_2\phi^2 - \phi^3 = 0$$

die Operationen nach einander an drei bekannten Vektoren vollzogen werden, wodurch man drei Gleichungen erhält, welche gestatten die drei Gröszen x, x_1, x_2 zu berechnen. In den nächstfolgenden Artikeln sind einige Beispiele der Lösung linearer Gleichungen gegeben worden. Wir fangen damit an eine einzige Gleichung nach der Methode dieses Artikels zu behandeln.

153. Es sei gefragt ρ zu bestimmen aus

$$a^2iSi\rho + b^2jSj\rho + c^2kSk\rho = \gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 61)$$

wo a, b, c Skalare, i, j, k die drei vorher schon eingeführten rechten Radiale, γ einen gegebenen Vektor bedeuten.

Die erste Seite ist die Funktion ϕ. Nehmen wir statt ρ der Reihe nach i, j, k, so erhält man

$$\phi i = -a^2 i,\ \phi j = -b^2 j,\ \phi k = -c^2 k$$

somit

$$\phi^2 i = \phi(-a^2 i) = +a^4 i,\ \phi^2 j = +b^4 j,\ \phi^2 k = +c^4 k$$
$$\phi^3 i = \phi(+a^4 i) = -a^6 i,\ \phi^3 j = -b^6 j,\ \phi^3 k = -c^6 k.$$

Nach Einführung dieses Wertsystems in die Relation ($f.$ 48), auf die drei Vektoren i, j, k jedesmal angewandt, werden die drei nachstehenden Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} a^6 + a^4x_2 + a^2x_1 + x = 0 \\ b^6 + b^4x_2 + b^2x_1 + x = 0 \\ c^6 + c^4x_2 + c^2x_1 + x = 0 \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 62)$$

Wenn wir nun weiter die kubische Gleichung bilden

$$\xi^3 + x_2\xi^2 + x_1\xi + x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f. 63)$$

so hat dieselbe nach (*f.* 62) die drei Wurzeln a^2, b^2, c^2. Es folgt daraus

$$x_2 = -(a^2 + b^2 + c^2),\ x_1 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2,\ x = -a^2b^2c^2 \quad (f. 64)$$

wodurch die Werte der Gröszen x_1, x_2, x gefunden sind.

Die Lösung der vorgelegten Gleichung ist nunmehr nach (*f.* 47) direkt hinzuschreiben. Indessen erfordert die Auswertung des Symbols Φ^2 noch einige Rechnung.

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\Phi^2\rho = a^2iS.i[a^2iSi\rho + b^2jSj\rho + c^2kSk\rho] &+ \\ + b^2jS.j[a^2iSi\rho + b^2jSj\rho + c^2kSk\rho] &+ \\ + c^2kS.k[a^2iSi\rho + b^2jSj\rho + c^2kSk\rho]& \\ = -a^4iSi\rho - b^4jSj\rho - c^4kSk\rho.&\end{aligned}$$

Hiermit wird sodann:

$$\rho = -\frac{(b^2 + c^2)}{b^2c^2}iSi\gamma - \frac{c^2 + a^2}{c^2a^2}jSj\gamma - \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}kSk\gamma - \\ - \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f. 65)$$

154. Nach der HAMILTONschen Methode lösen wir weiter auf

1⁰. $$V.\alpha\rho\beta = \gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f. 66)$$

Es ist die erste Seite dieser Gleichung nach (*c.* 41) gleichwertig mit:

$$\beta S.\alpha\rho - \rho S.\alpha\beta + \alpha S.\beta\rho$$

und dieser Ausdruck ist somit die HAMILTONsche Funktion Φ. Es ist deshalb weiter

$$\Phi'\rho = \alpha S.\beta\rho - \rho KS.\alpha\beta + \beta S.\alpha\rho = \Phi\rho = V.a\rho\beta \ldots (f. 67)$$

Setzen wir noch voraus, die gegebenen Vektoren α, β, γ seien nicht complanar, so kann man dieselben als die Vektoren λ, μ, ν bzhw. des Artikels 143 betrachten. Es wird dadurch

$$\left.\begin{aligned}\Phi'\lambda &= \Phi'\alpha = V.\alpha^2\beta = \alpha^2\beta, \text{ weil } \alpha^2 \text{ skalar ist} \\ \Phi'\mu &= \Phi'\beta = V.\alpha\beta^2 = \beta^2\alpha, \text{ weil } \beta^2 \text{ skalar ist} \\ \Phi'\nu &= \Phi'\gamma = V.\alpha\beta\gamma\end{aligned}\right\} . \quad (f. 68)$$

Somit ist

$$\begin{aligned}S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu &= S.\alpha^2\beta^2\beta\alpha\, V\alpha\gamma\beta = \alpha^2\beta^2S.\beta\alpha\, V\alpha\gamma\beta = \\ &= \alpha^2\beta^2S.\beta\alpha(\alpha\gamma\beta - S.\alpha\gamma\beta) = \\ &= \alpha^2\beta^2S.\beta\alpha^2\gamma\beta - \alpha^2\beta^2S.\beta\alpha S\alpha\gamma\beta = \alpha^2\beta^2S\alpha\beta.S\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

$$S.[\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu + \mu\Phi'\nu\Phi'\lambda + \nu\Phi'\lambda\Phi'\mu] =$$
$$= S.[\alpha\beta^2\alpha V\alpha\gamma\beta + \beta(V\alpha\gamma\beta)\alpha^2\beta + \gamma\alpha^2\beta^3\alpha]$$
$$= \alpha^2\beta^2 S\gamma\beta\alpha = - \alpha^2\beta^2 S.\alpha\beta\gamma$$
$$S.[\mu\nu\Phi'\lambda + \nu\lambda\Phi'\mu + \lambda\mu\Phi'\nu] = S.[\beta\gamma\alpha^2\beta + \gamma\alpha\beta^2\alpha + \alpha\beta V\alpha\gamma\beta] =$$
$$= S.\alpha\beta V\alpha\gamma\beta = - S.\beta\alpha V\alpha\gamma\beta$$
$$= - S.\beta\alpha(\alpha\gamma\beta - S\alpha\gamma\beta) =$$
$$= - S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma$$

und mit Hülfe dieser Werte erhält man unmittelbar

$$x = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\,,\ x_1 = - \alpha^2\beta^2\,,\ x_2 = - S\alpha\beta\,.\ .\ .\ (f.\ 69)$$

Weil noch

$$\Phi^2\rho = \Phi\Phi\rho = V.\alpha(V\alpha\gamma\beta)\beta = V.\alpha(\alpha S\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta + \beta S\alpha\gamma)\beta$$
$$= \alpha^2\beta S\beta\gamma - S\alpha\beta V.\alpha\gamma\beta + \beta^2\alpha S\gamma\alpha,$$

so wird die Lösung der Gleichung $(f.\ 66)$

$$\rho\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = - \alpha^2\beta^2\gamma + \alpha^2\beta S\beta\gamma + \beta^2\alpha S\gamma\alpha$$
$$= + \alpha^2\beta^2[- \gamma + \beta^{-1}S\beta\gamma + \alpha^{-1}S\gamma\alpha]$$

oder

$$\rho = \frac{- \gamma + \alpha^{-1}S\gamma\alpha + \beta^{-1}S\beta\gamma}{S\alpha\beta}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (f.\ 70)$$

2^0. $$V.\rho\alpha\beta = \gamma\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (f.\ 71)$$

Es ist jetzt

$$\Phi\rho = \rho S\alpha\beta - \alpha S\beta\rho + \beta S\alpha\rho$$
$$\Phi'\rho = \rho KS\alpha\beta - \beta S\alpha\rho + \alpha S\beta\rho = V.\rho\beta\alpha$$

Wenn α, β, γ wieder nicht complanar vorausgesetzt werden, so wird man dieselben als die vorher angewandten λ, μ, ν betrachten können, und somit erhalten

$$\Phi'\lambda = \Phi'\alpha = V.\alpha\beta\alpha = 2\alpha S\alpha\beta - \alpha^2\beta,$$
$$\Phi'\mu = \Phi'\beta = V.\beta^2\alpha = \beta^2\alpha,$$
$$\Phi'\nu = \Phi'\gamma = V.\gamma\beta\alpha = V.\alpha\beta\gamma \text{ nach } (c.\ 42),$$
$$S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu = S.(2\alpha S\alpha\beta - \alpha^2\beta)\beta^2\alpha V\alpha\beta\gamma = - \alpha^2\beta^2 S.\beta\alpha V\alpha\beta\gamma$$
$$= - \alpha^2\beta^2 S.\beta\alpha(\alpha\beta\gamma - S\alpha\beta\gamma) = + \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta.S\alpha\beta\gamma$$
$$S.[\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu + \mu\Phi'\nu\Phi'\lambda + \nu\Phi'\lambda\Phi'\mu] =$$
$$= S.[\alpha\beta^2\alpha V\alpha\beta\gamma + \beta(V\alpha\beta\gamma)(2\alpha S\alpha\beta - \alpha^2\beta) + \gamma(2\alpha S\alpha\beta - \alpha^2\beta)\beta^2\alpha]$$
$$= 2S\alpha\beta S.\beta(V\alpha\beta\gamma)\alpha - \alpha^2\beta^2 S.\gamma\beta\alpha$$
$$= 2S\alpha\beta S.\beta(\alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta)\alpha + \alpha^2\beta^2 S.\alpha\beta\gamma$$
$$= 2(S\alpha\beta)^2 S\beta\gamma\alpha + \alpha^2\beta^2 S.\alpha\beta\gamma$$
$$= 2(S\alpha\beta)^2 S\alpha\beta\gamma + \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\gamma$$

$$S.[\mu\nu\Phi'\lambda+\nu\lambda\Phi'\mu+\lambda\mu\Phi'\nu]=S.[\beta\gamma(2\alpha S\alpha\beta-\alpha^2\beta)+\gamma\alpha\beta^2\alpha+\alpha\beta V\alpha\beta\gamma]$$
$$=2S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma+S.\alpha\beta(\alpha S\beta\gamma-\beta S\gamma\alpha+\gamma S\alpha\beta)$$
$$=3S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma$$

Mit diesen Resultaten wird

$$x=\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\,,\quad x_1=2(S\alpha\beta)^2+\alpha^2\beta^2\,,\quad x_2=3S\alpha\beta.$$

Weiter ist

$$\Phi^2\rho=V.(V\rho\alpha\beta)\alpha\beta=V.(\rho S\alpha\beta-\alpha S\beta\rho+\beta S\alpha\rho)\alpha\beta=$$
$$=S\alpha\beta V\rho\alpha\beta-\alpha^2\beta S\beta\rho+S\alpha\rho V\beta\alpha\beta$$

und die Lösung wird

$$\rho\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta=2\gamma(S\alpha\beta)^2+\alpha^2\beta^2\gamma-2S\alpha\beta V\gamma\alpha\beta-\alpha^2\beta S\beta\gamma+S\alpha\gamma V\beta\alpha\beta$$
$$=\alpha^2\beta^2\gamma-\alpha\beta^2 S\alpha\gamma-\beta\alpha^2 S\beta\gamma+2\alpha S\alpha\beta S\beta\gamma \text{ nach } (c.\ 41)$$

oder

$$\rho=\frac{\gamma-\alpha^{-1}S\alpha\gamma-\beta^{-1}S\beta\gamma+2\alpha^{-1}\beta^{-2}S\alpha\beta S\beta\gamma}{S\alpha\beta}\quad\ldots(f.\ 72)$$

3⁰. $$V\alpha\rho=\gamma\,.\ldots\ldots\ldots\ldots(f.\ 73)$$

Bei dieser Gleichung ist

$$\Phi\rho=V\alpha\rho\,,\quad \Phi'\rho=-V\alpha\rho.$$

Operiren wir an die gegebene Gleichung mit $S.\alpha$, so erhalten wir

$$S.\alpha\gamma=S.\alpha V\alpha\rho=S.\alpha\alpha\rho=\alpha^2 S\rho=0\,,$$

oder

$$S\alpha\gamma=0.$$

Wenn wir statt λ, μ, ν in diesem Falle α, γ, $V\alpha\gamma$ wählen, so kann der letztere Ausdruck demnach auch durch $\alpha\gamma$ ersetzt werden.

Es wird dadurch

$$\Phi'\lambda=\Phi'\alpha=-V\alpha\alpha=0$$
$$\Phi'\mu=\Phi'\gamma=-V\alpha\gamma=-\alpha\gamma$$
$$\Phi'\nu=\Phi'(\alpha\gamma)=-V.\alpha^2\gamma=-\alpha^2\gamma.$$
$$S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu=0$$
$$S.[\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu+\mu\Phi'\nu\Phi'\lambda+\nu\Phi'\lambda\Phi'\mu]=S.\alpha^2\gamma\alpha^2\gamma=\alpha^4\gamma^2$$
$$S.[\mu\nu\Phi'\lambda+\nu\lambda\Phi'\mu+\lambda\mu\Phi'\nu]=S.[-\alpha\gamma\alpha^2\gamma-\alpha\gamma\alpha^2\gamma]=-2S\alpha^3\gamma^2=0$$
$$S.\lambda\mu\nu=S.\alpha\gamma\alpha\gamma=S.(V\alpha\gamma)(V\alpha\gamma)\ \text{ weil }\ S\alpha\gamma=0\,,$$
$$=S.(V\alpha\gamma)^2=-NV\alpha\gamma=-N\alpha\gamma=-\alpha^2\gamma^2.$$

Mit diesen Werten wird somit

$$x=0,\quad x_1=-\alpha^2,\quad x_2=0.$$

Wir müssen nun, weil $x = 0$, die Gleichung (*f.* 57) in Anwendung bringen, und es kommt daher noch darauf an die Funktion $U\pi$ zu bestimmen. Es soll dieselbe der Gleichung $V\alpha\pi = 0$ genügen nach (*f.* 51); diese Gleichung sagt nach (*c.* 31) aus, dass $\pi // \alpha$. Es ist somit $U\pi = U\alpha$ zu setzen. Die Grösze $yU\pi$, wo y ein willkürlicher Faktor ist, kann auch durch $y\alpha$ ersetzt werden. Die Lösung der vorgelegten Gleichung wird somit

$$-\alpha^2\rho = -V\alpha\gamma + y\alpha,$$

oder weil $S\alpha\gamma$ der Null gleich kommt

$$\rho = \alpha^{-1}(\gamma - y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 74)$$

Den Skalar $-y$ kann man hierin natürlich auch durch $+y$ ersetzen.

4⁰. $$a^2iSi\rho + b^2jSj\rho + c^2kSk\rho = \gamma$$

Es ist dies dieselbe Gleichung, welche wir im vorigen Artikel auf andre Weise gelöst haben. Mit derselben wird

$$\Phi\rho = \alpha^2iSi\rho + b^2jS.j\rho + c^2kS.k\rho = \Phi'\rho$$

Statt λ, μ, ν wollen wir i, j, k bzhw. setzen. Es wird sodann

$$\Phi'\lambda = \Phi'i = -\alpha^2 i,\ \Phi'\mu = \Phi'j = -b^2j,\ \Phi'\nu = \Phi'k = -c^2k.$$

$S.\lambda\mu\nu = S.ijk = -1$ nach (*b.* 80)

$$S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu = S. - a^2b^2c^2ijk = + a^2b^2c^2$$

$$S.[\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu + \mu\Phi'\nu\Phi'\lambda + \nu\Phi'\lambda\Phi'\mu] = S.(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)\, ijk =$$
$$= -(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)$$

$$S.[\mu\nu\Phi'\lambda + \nu\lambda\Phi'\mu + \lambda\mu\Phi'\nu] = S. - (a^2jki + b^2kij + c^2ijk) =$$
$$= -S.(\alpha^2 + b^2 + c^2)\, ijk \text{ nach } (b.\ 80)$$
$$= +(a^2 + b^2 + c^2).$$

Wir erhalten daher

$$x = -a^2b^2c^2,\ x_1 = +(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2),\ x^2 = -(a^2 + b^2 + c^2)$$

Die Lösung wird hiermit leicht in der Gestalt (*f.* 65) erhalten.

155. Wie schon vorher bemerkt, ist die Funktion $\Phi\rho$ ein Vektor. Man kann demnach fragen, wann der Vektor $\Phi\rho$ mit ρ der Richtung nach zusammenfällt. Eine jede Richtung, bei der dies stattfindet, wollen wir eine H a u p t r i c h t u n g f ü r d i e F u n k t i o n Φ nennen.

Für eine Hauptrichtung musz $\Phi\rho = m\rho$ sein, wo m skalar ist. Es wird weiter für dieselbe

$$\Phi^2\rho = \Phi m\rho = m\Phi\rho = m^2\rho,\ \Phi^3\rho = m^3\rho, \text{ u. s. w.}$$

sein müssen.

Die kubische Gleichung (*f.* 48) geht demnach bei einer Hauptrichtung über in

$$x - m\,x_1 + m^2\,x_2 - m^3 = 0 \;\ldots\ldots\; (f.\ 75)$$

und hierdurch ist eine kubische Skalargleichung zur Bestimmung der Grösze m erhalten. Sind m_1, m_2, m_3 die drei Wurzeln dieser Gleichung, so können auch drei Vektoren ρ_1, ρ_2, ρ_3 erhalten werden, welche den Gleichungen

$$\Phi\rho_1 = m_1\rho_1,\ \Phi\rho_2 = m_2\rho_2,\ \Phi\rho_3 = m_3\rho_3$$

oder

$$(\Phi - m_1)\rho_1 = 0,\ (\Phi - m_2)\rho_2 = 0,\ (\Phi - m_3)\rho_3 = 0\ .\ (f.\ 76)$$

Genüge leisten. Wie unmittelbar ersichtlich bestimmen die Gleichungen (*f.* 76) nur die Richtungen der drei Vektoren ρ_1, ρ_2, ρ_3, weil die Substitution $x\rho_1$ anstatt ρ_1, u. s. w. die Gleichungen nicht ändert.

Wir haben somit den nachstehenden Satz erhalten:

Bei jeder Funktion Φ gehören im allgemeinen drei Hauptrichtungen. Nehmen wir zum Beispiel die im vorigen Artikel sub 4⁰ betrachtete Funktion

$$\Phi = a^2 iSi\rho + b^2 jSj\rho + c^2 kSk\rho$$

Die Gleichung (*f.* 75) ist für diesen Fall

$$m^3 + (a^2 + b^2 + c^2)m^2 + (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)m + a^2b^2c^2 = 0,$$

deren Wurzeln $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ sind.

Um die drei Hauptrichtungen der Funktion Φ zu finden, hat man somit drei Gleichungen aufzulösen von der Form

$$a^2 iS.i\rho + b^2 jS.j\rho + c^2 kS.k\rho + a^2\rho = 0 \;\ldots\; (f.\ 77)$$

Wir wollen die Lösung nicht nach der allgemeinen Methode durchführen. Nur wollen wir erwähnen, dass durch Operation mit $S.i$ an die Gleichung (*f.* 77) eine Identität entsteht. Durch die Operation mit $S.j$, und auch mit $S.k$ entstehen die beiden Relationen:

$$S.j\rho = 0,\ S.k\rho = 0 \;\ldots\ldots\; (f.\ 78)$$

wenn nämlich die Gröszen a, b, c von einander verschieden vorausgesetzt werden.

Die Gleichungen ($f.$ 78) sagen aus, dass die eine der drei Hauptrichtungen senkrecht zu j, k ist, somit in die Richtung des Vektors i fällt.

Ebenfalls sind die beiden anderen Hauptrichtungen parallel zu j, k bzhw.

156. Sind die drei Hauptrichtungen gefunden, so kann man in denselben drei Einheitsvektoren annehmen, welche im nachstehenden mit ρ_1, ρ_2, ρ_3 bezeichnet sind. Ein willkürlicher Vektor ρ kann nach diesen Hauptrichtungen zerlegt werden, wie im ersten Abschnitte gezeigt worden ist. Es sei

$$\rho = k_1\rho_1 + k_2\rho_2 + k_3\rho_3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (f.\ 79)$$

wo k_1, k_2, k_3 drei Skalare bedeuten.

Wenn man nunmehr an diese Gleichung mit dem Symbol $(\phi - m_1)$ operirt, so wird erhalten bei Berücksichtigung der Relationen ($f.$ 76)

$$(\phi - m_1)\rho = k_2(m_2 - m_1)\rho_2 + k_3(m_3 - m_1)\rho_3 \quad . \; . \quad (f.\ 80)$$

Eine abermalige Operation mit $\phi - m_2$ liefert

$$(\phi - m_2)(\phi - m_1)\rho = k_3(m_3 - m_2)(m_3 - m_1)\rho_3$$

und hieraus kann ρ_3 unmittelbar aufgelöst werden

$$\rho_3 = \frac{(\phi - m_2)(\phi - m_1)\rho}{k_3(m_3 - m_2)(m_3 - m_1)}$$

In gleicher Weise

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{(\phi - m_3)(\phi - m_2)\rho}{k_1(m_1 - m_3)(m_1 - m_2)} \\ \rho_2 &= \frac{(\phi - m_1)(\phi - m_3)\rho}{k_2(m_2 - m_1)(m_2 - m_3)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (f.\ 81)$$

Aus jedem willkürlichen Vektor ρ sind somit die drei Hauptrichtungen leicht herzuleiten. Die Richtungen derselben fallen zusammen mit denjenigen der drei Vektoren

$$(\phi - m_3)(\phi - m_2)\rho, \; (\phi - m_1)(\phi - m_3)\rho, \; (\phi - m_1)(\phi - m_2)\rho \quad (f.\ 82)$$

157. Wenn die Gleichung ($f.$ 75) drei reelle Wurzeln hat, so werden die drei Hauptrichtungen reell und die in denselben angenommenen Vektoren werden auch reelle Vektoren sein.

Es musz dieser Fall stets eintreten, wenn die Funktion ϕ selbstconjugirt ist. Denn wären sodann

$$k + l\sqrt{-1}, \; k - l\sqrt{-1}$$

zwei Wurzeln der Gleichung ($f.$ 75), z. B. die vorher mit m_2,

m_3 bezeichneten Wurzeln, so müszten nach (*f.* 82) die zweite und dritte Hauptrichtung mit Vektoren der Form

$$\sigma + \tau\sqrt{-1},\ \sigma - \tau\sqrt{-1}$$

bezeichnet werden. Nach (*f.* 19) (*f.* 20) ist jedoch

$$\Phi(\sigma + \tau\sqrt{-1}) = \Phi\sigma + \sqrt{-1}\,\Phi\tau.$$

Es sollte dieser Ausdruck nach (*f.* 76) der nachstehenden gleich kommen

$$(k + l\sqrt{-1})(\sigma + \tau\sqrt{-1}) \text{ oder } k\sigma - l\tau + \sqrt{-1}(l\sigma + k\tau),$$

woraus man schlieszen könnte

$$\Phi\sigma = k\sigma - l\tau,\ \Phi\tau = l\sigma + k\tau,$$

und indem man an die erste dieser Gleichungen mit $S.\tau$, an die zweite mit $S.\sigma$ operirte

$$S.\tau\Phi\sigma = kS\sigma\tau - l\tau^2 \text{ und } S.\sigma\Phi\tau = l\sigma^2 + kS\sigma\tau.$$

Weil jedoch Φ selbstconjugirt vorausgesetzt ist, sind die ersten Seiten dieser Gleichungen einander gleich. Somit soll auch

$$l(\sigma^2 + \tau^2) = 0$$

sein und daher musz l verschwinden, weil σ^2 und τ^2 beide negativ sind. Die beiden complex vorausgesetzten Wurzeln können demnach nicht vorhanden sein.

Setzen wir im Nachfolgenden die Selbstconjugation der Funktion Φ voraus.

Aus der Gleichung

$$(\Phi - m_1)\,\rho_1 = 0,$$

folgt allgemein

$$S.\rho(\Phi - m_1)\rho_1 = 0,$$

oder nach der Haupteigenschaft der conjugirten Funktionen, welche auch dem Symbol $\Phi - m_1$ zukommt nach Art. 141,

$$S.\rho_1(\Phi' - m_1)\rho = 0 \text{ oder } S.\rho_1(\Phi - m_1)\,\rho = 0,$$

weil $\Phi' = \Phi$ unsrer Annahme zufolge.

Aus dieser Beziehung wird geschlossen, dass jeder Vektor $(\Phi - m_1)\rho$, wo ρ ganz willkürlich gewählt werden kann, senkrecht zur Hauptrichtung ρ_1 ist. Nach (*f.* 80) ist somit auch jeder Vektor

$$k_2(m_2 - m_1)\rho_2 + k_3(m_3 - m_1)\rho_3,$$

wo k_2, k_3 willkürliche Skalare bedeuten, zur Hauptrichtung senkrecht. Es wird jedoch mit dem soeben geschriebenen Aus-

druck ein willkürlicher Vektor in der Ebene der Hauptrichtungen ρ_2, ρ_3 bezeichnet. Man kann daher schlieszen, der Vektor ρ_1 sei senkrecht zur Ebene der Vektoren ρ_2, ρ_3.

Analoge Behauptungen können in Bezug auf ρ_2, ρ_3 gemacht werden, wodurch wir den Satz erhalten:

Im Falle der Selbstconjugation sind die drei Hauptrichtungen senkrecht zu einander.

Wenn in demselben Falle zwei Wurzeln m_2, m_3 der Gleichung (*f.* 75) einander gleich werden, so bleiben natürlich die drei ursprünglich zu einander senkrechten Hauptrichtungen bestehen und wir hören nicht auf, dieselben mit ρ_1, ρ_2, ρ_3 zu bezeichnen. Man kann jedoch in diesem Falle setzen

$$\Phi\rho_1 = m_1\rho_1\,,\quad \Phi\rho_2 = m_2\rho_2\,,\quad \Phi\rho_3 = m_2\rho_3.$$

Es wird daher, wenn k_2, k_3 willkürliche Skalare bedeuten

$$k_2\Phi\rho_2 + k_3\Phi\rho_3 = m_2(k_2\rho_2 + k_3\rho_3)$$

oder

$$\Phi(k_2\rho_2 + k_3\rho_3) = m_2(k_2\rho_2 + k_3\rho_3) \text{ nach } (f.\ 19)\ (f.\ 20)\,. \quad (f.\ 83)$$

Aus dieser Relation geht hervor, dass $k_2\rho_2 + k_3\rho_3$ als eine Hauptrichtung betrachtet werden musz; die Willkürlichkeit der Gröszen k_2, k_3 beachtend, erhält man den Satz:

Wenn in dem Falle der Selbstconjugation die Gleichung (*f.* 75) zwei gleiche Wurzeln m_2, m_3 hat, so ist jeder Vektor in der Ebene der Hauptrichtungen ρ_2, ρ_3 ebenfalls als eine Hauptrichtung zu betrachten.

Schreibt man wieder für einen willkürlichen Vektor die Gleichung (*f.* 79) nieder, so ist (*f.* 83)

$$(\Phi - m_2)\rho = (\Phi - m_2)(k_1\rho_1) = k_1(m_1 - m_2)\rho_1.$$

Somit wird ρ_1 bestimmt durch

$$\rho_1 = \frac{(\Phi - m_2)\rho}{k_1(m_1 - m_2)}.$$

Wenn schlieszlich die drei Wurzeln der Gleichung (*f.* 75) einander gleich werden $m_1 = m_2 = m_3$, so ist herzuleiten

$$\Phi(k_1\rho_1 + k_2\rho_2 + k_3\rho_3) = m_1(k_1\rho_1 + k_2\rho_2 + k_3\rho_3)$$

wo k_1, k_2, k_3 willkürliche Skalare bedeuten. Diese Gleichung spricht den Satz aus:

Wenn in dem Falle der Selbstconjugation die Gleichung

($f.$ 75) drei gleiche Wurzeln hat, so ist jeder Vektor im Raume eine Hauptrichtung.

158. Unsre Betrachtungen über die Funktion $\Phi\rho$ wollen wir damit schlieszen, dass wir dieselbe in einige bisher noch nicht verzeichneten Formen bringen, deren erstere HAMILTON die dreigliederige Grundform für die lineare und Vektorfunktion eines Vektors genannt hat.

Wenn α_1, α_2, α_3 drei willkürliche Vektoren sind, so kann nach ($c.$ 45) oder ($c.$ 46) jeder Vektor linear in denselben ausgedrückt werden. Für einen Vektor ρ erhält man nach ($c.$ 46)

$$\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_2\alpha_3 S\alpha_1\rho + V\alpha_3\alpha_1 S\alpha_2\rho + V\alpha_1\alpha_2 S\alpha_3\rho. \quad . \quad (f. 83)$$

nach ($c.$ 45)

$$\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1 S\alpha_2\alpha_3\rho + \alpha_2 S\alpha_3\alpha_1\rho + \alpha_3 S\alpha_1\alpha_2\rho$$

und die letztere Gleichung lässt sich auch schreiben

$$\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1 S(V\alpha_2\alpha_3)\rho + \alpha_2 S.(V\alpha_3\alpha_1)\rho + \alpha_3 S.(V\alpha_1\alpha_2)\rho. \quad (f. 84)$$

Setzen wir der Einfachheit halber

$$\beta_1 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_2\alpha_3,\ \beta_2 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_3\alpha_1,\ \beta_3 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_1\alpha_2 \quad (f. 85)$$

so gehen die Gleichungen ($f.$ 83) ($f.$ 84) über in

$$\rho = \beta_1 S\alpha_1\rho + \beta_2 S\alpha_2\rho + \beta_3 S\alpha_3\rho = \alpha_1 S\beta_1\rho + \alpha_2 S\beta_2\rho + \alpha_3 S\beta_3\rho \quad (f. 86)$$

Wenn nunmehr an die erstere dieser Relationen mit Φ operirt wird, so erhält man, wenn die Gleichungen ($f.$ 19) ($f.$ 20) beachtet werden,

$$\Phi\rho = \Phi\beta_1.S\alpha_1\rho + \Phi\beta_2.S\alpha_2\rho + \Phi\beta_3.S\alpha_3\rho$$

und bei Einführung neuer Gröszen γ_1, γ_2, γ_3 derart, dass

$$\gamma_1 = \Phi\beta_1,\ \gamma_2 = \Phi\beta_2,\ \gamma_3 = \Phi\beta_3 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (f. 87)$$

schlieszlich

$$\Phi\rho = \gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho + \gamma_3 S\alpha_3\rho \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (f. 88)$$

eine Relation welche $\Phi\rho$ mittelst drei unabhängiger Vektoren und ρ ausdrückt. Es ist dies die am Anfang dieses Artikels erwähnte dreigliedrige Grundform.

Wir wollen weiter die conjugirte Funktion zu finden versuchen. Setzt man in die zweite der Gleichungen ($f.$ 86) $\Phi'\rho$ statt ρ, so wird erhalten

$$\begin{aligned}\Phi'\rho &= \alpha_1 S.\beta_1\Phi'\rho + \alpha_2 S.\beta_2\Phi'\rho + \alpha_3 S.\beta_3\Phi'\rho \\ &= \alpha_1 S.\rho\Phi\beta_1 + \alpha_2 S.\rho\Phi\beta_2 + \alpha_3 S.\rho\Phi\beta_3 \text{ nach } (f. 29) \\ &= \alpha_1 S\rho\gamma_1 + \alpha_2 S\rho\gamma_2 + \alpha_3 S\rho\gamma_3, \text{ nach } (f. 87)\end{aligned}$$

oder schlieszlich

$$\Phi'\rho = \alpha_1 S\gamma_1\rho + \alpha_2 S\gamma_2\rho + \alpha_3 S\gamma_3\rho.$$

Es geht demnach Φ' aus Φ hervor durch die Umtauschung der Gröszen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bzhw.

159. Wir wollen diese Ergebnisse verwenden einen Satz darzutun, dessen wir nachher bedürfen werden. Bei der dreigliedrigen Grundform wollen wir die Grösze

$$x' = \frac{S.\Phi\lambda\,\Phi\mu\,\Phi\nu}{S.\lambda\mu\nu}$$

berechnen. Es sind der Zähler und der Nenner derselben, wie unmittelbar nach Art. 144 einleuchtet, Invarianten; den Wert des Bruches zu finden, kann man demnach statt λ, μ, ν drei willkürliche Vektoren wählen z. B. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Hiermit wird bei Beachtung der Gleichungen (*f.* 87)

$$x' = \frac{S.\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{S.\beta_1\beta_2\beta_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 89)$$

Behufs Umgestaltung dieser Beziehung wollen wir die Grösze $S.\beta_1\beta_2\beta_3$ aus (*f.* 85) berechnen. Es ergibt sich dadurch

$$S\beta_1\beta_2\beta_3(S\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^3 = S.\,V\alpha_2\alpha_3\,V\alpha_3\alpha_1\,V\alpha_1\alpha_2 \quad \ldots (f.\ 90)$$

Es ist jedoch

$$\begin{aligned} S.\,V\alpha_2\alpha_3\,V\alpha_3\alpha_1\,V\alpha_1\alpha_2 &= S.\,V\alpha_2\alpha_3\,V[V\alpha_3\alpha_1\,V\alpha_1\alpha_2] = \\ &= S.\,V\alpha_2\alpha_3(\alpha_2 S.\alpha_1\,V\alpha_3\alpha_1 - \alpha_1 S.\alpha_2\,V\alpha_3\alpha_1) \text{ nach } (c.\ 44) \\ &= S.\alpha_2\alpha_3(-\alpha_1 S\alpha_2\alpha_3\alpha_1). \end{aligned}$$

Daher wird

$$S.\,V\alpha_2\alpha_3\,V\alpha_3\alpha_1\,V\alpha_1\alpha_2 = -(S\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2$$

und bei Einführung dieses Wertes in (*f.* 90) ergibt sich

$$S\beta_1\beta_2\beta_3 \,.\, S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -1. \quad \ldots\ldots\ldots (f.\ 91)$$

Es lässt sich demnach der in (*f.* 89) gefundene Ausdruck auch in der Form schreiben

$$x' = -S\gamma_1\gamma_2\gamma_3 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = S\gamma_1\gamma_2\gamma_3 S\alpha_3\alpha_2\alpha_1 \quad \ldots (f.\ 92)$$

Diese Gleichung enthält unsren Satz. Denn wenn wir anstatt x' die Grösze

$$x = \frac{S.\Phi'\lambda\,\Phi'\mu\,\Phi'\nu}{S.\lambda\mu\nu}$$

berechnen wollten, so hätten wir im Vorigen nur die Funktionen Φ' und Φ, d. h. nach dem vorigen Artikel die Gröszen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, zu vertauschen. Es ergibt sich daher,

wenn man sich den Satz erinnert, (Art. 87), nach welchem der Skalarteil des Produktes drei rechter Quotienten das Zeichen wechselt, wenn die Faktoren eine acyclische Umtauschung erfahren, dass die Gröszen x, x' gleich sein müssen.

160. Es sei, um einige Beispiele zu geben, die Funktion $V\alpha\rho\beta$ vorgelegt mit der Frage, die dreigliedrige Grundform derselben anzugeben.

Für die Gröszen α_1, α_2, α_3 wollen wir α, β, $V\alpha\beta$ wählen.

Es ist sodann

$$\gamma_1 = \frac{1}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\Phi(V\alpha_2\alpha_3) = \frac{1}{S.\alpha\beta\, V\alpha\beta}\Phi(V.\beta\, V\alpha\beta) =$$

$$= \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.[\alpha\, V(\beta\, V\alpha\beta)\beta] = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha(\beta S\alpha\beta - \alpha\beta^2)\beta =$$

$$= \frac{\beta^2}{(V\alpha\beta)^2}\alpha(S\alpha\beta - \alpha\beta) = -\frac{\alpha\beta^2\, V\alpha\beta}{(V\alpha\beta)^2} = -\frac{\alpha\beta^2}{V\alpha\beta}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.[\alpha\, V(V\alpha\beta.\alpha)\beta] = -\frac{\beta\alpha^2}{V\alpha\beta}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha(V\alpha\beta)\beta = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha(\alpha\beta - S\alpha\beta)\beta = -\frac{S\alpha\beta}{V\alpha\beta}$$

Hiermit wird die dreigliedrige Grundform für die Funktion $V\alpha\rho\beta$

$$-\frac{\alpha\beta^2}{V\alpha\beta}S\alpha\rho - \frac{\beta\alpha^2}{V\alpha\beta}S\beta\rho - \frac{S\alpha\beta}{V\alpha\beta}S\alpha\beta\rho =$$

$$= -\frac{\alpha\beta^2 S\alpha\rho + \beta\alpha^2 S\beta\rho + S\alpha\beta S\alpha\beta\rho}{V\alpha\beta}.$$

Zu einem andren Beispiele sei $V\alpha\rho$ gewählt. Ist nunmehr β ein willkürlicher Vektor, so setzen wir

$$\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \beta,\ \alpha_3 = V\alpha\beta.$$

Somit wird

$$\gamma_1 = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha\, V(\beta\, V\alpha\beta) = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha\beta\, V\alpha\beta, \text{ weil } S.\beta\, V\alpha\beta = 0,$$

$$= \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}S\alpha\beta\, V\alpha\beta = \frac{S\alpha\beta}{V\alpha\beta}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha\, V(V\alpha\beta.\alpha) = -\frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha\, V(\alpha\, V\alpha\beta) =$$

$$= -\frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha^2\, V\alpha\beta = -\frac{\alpha^2}{V\alpha\beta}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2} V.\alpha V\alpha\beta = \frac{\alpha V\alpha\beta}{(V\alpha\beta)^2} = \frac{\alpha}{V\alpha\beta}.$$

Wählt man nunmehr β derart, dass

$$S\alpha\beta = 0\,, \quad V\alpha\beta = \alpha\beta = -\beta\alpha$$

so wird erhalten

$$\gamma_1 = 0\,, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha^2}{\beta\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \gamma_3 = -\frac{\alpha}{\beta\alpha} = -\frac{1}{\beta},$$

und es ist die dreigliedrige Grundform für $V\alpha\rho$

$$\frac{\alpha}{\beta} S\beta\rho - \frac{\alpha}{\beta} S\alpha\beta\rho = \frac{\alpha S\beta\rho - S\alpha\beta\rho}{\beta}.$$

Die Funktion

$$a^2 i S i\rho + b^2 j S j\rho + c^2 k S k\rho$$

ist in der dreigliedrigen Grundform gegeben, weil hierbei

$$\gamma_1 = \frac{1}{Sijk} \Phi(Vjk) = -\Phi(i) = a^2 i$$

u. s. w. wird, wenn

$$\alpha_1 = i, \quad \alpha_2 = j, \quad \alpha_3 = k$$

angenommen ist.

161. Wir wollen weiter ein zweite Transformation der linearen Vektorfunktion $\Phi\rho$ angeben, welche bei den Anwendungen gewisse Vorteile bieten wird.

Die Summe $(\Phi + \Phi')\rho$, wo Φ' die Conjugirte der Funktion Φ bedeutet, ist eine selbstconjugirte Funktion. Wir wollen setzen

$$\Phi\rho + \Phi'\rho = 2\,\Phi_0\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 93)$$

Im Art. 141 ist schon bewiesen worden, dass der Vektor $(\Phi - \Phi')\rho$ zu ρ senkrecht ist, oder dass man setzen kann

$$\Phi\rho - \Phi'\rho = 2\,V\delta\rho. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 94)$$

wo δ ein gewisser Vektor bedeutet. Derselbe ist aber völlig bestimmt, wie mit Hülfe der dreigliedrigen Grundform für die Funktion Φ leicht dargetan werden kann. Ist dieselbe nämlich

$$\Phi\rho = \gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho + \gamma_3 S\alpha_3\rho$$

somit

$$\Phi'\rho = \alpha_1 S\gamma_1\rho + \alpha_2 S\gamma_2\rho + \alpha_3 S\gamma_3\rho$$

so ergibt die Gleichung, welche δ definirt,

$$2\,V\delta\rho = \Sigma(\gamma_i S\alpha_i\rho - \alpha_i S\gamma_i\rho) \text{ für } i = 1,\ 2,\ 3$$

$$= \Sigma_i V.\rho V\alpha_i\gamma_i$$

und hieraus wird unmittelbar geschlossen

$$\delta = \frac{1}{2} V(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) \quad \ldots\ldots \quad (f. 95)$$

Die Addition der Gleichungen (*f.* 93) (*f.* 94) ergibt noch

$$\Phi\rho = \Phi_0\rho + V\delta\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f. 96)$$

oder in Worten: Jede lineare Vektorfunktion ist von einer selbstconjugirten nur um ein Glied von der Form $V\delta\rho$ verschieden.

162. Für eine selbstconjugirte Funktion bestehen, wie schon erörtert, drei Hauptrichtungen, welche stets reell und unter sich zu je zwei rechtwinklig sind. Bezeichnen wir die Einheitsvektoren in den Richtungen derselben mit ρ_1, ρ_2, ρ_3 und setzen

$$\Phi_0\rho_1 = m_1\rho_1\,,\ \Phi_0\rho_2 = m_2\rho_2\,,\ \Phi_0\rho_3 = m_3\rho_3 \quad \ldots\ldots \quad (f. 97)$$

wo m_1, m_2, m_3 die Wurzeln der Gleichung

$$x - x_1 m + x_2 m^2 - m^3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f. 98)$$

bedeuten, wenn die Coefficienten x, x_1, x_2 auf die schon erörterte Weise aus der Funktion Φ_0 hergeleitet sind, so ergibt die Einführung der Gröszen ρ_1, ρ_2, ρ_3 anstatt α_1, α_2, α_3 in die dreigliedrige Grundform für Φ_0 erhebliche Vereinfachung. Denn es wird sodann in der letzteren

$$\gamma_1 = \frac{1}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \Phi_0 V\alpha_2\alpha_3 = -\Phi_0\rho_1 = -m_1\rho_1$$

weil

$$S\rho_1\rho_2\rho_3 = -1 \text{ und } V\alpha_2\alpha_3 = \rho_1$$

und in gleicher Weise

$$\gamma_2 = -m_2\rho_2\,,\ \gamma_3 = -m_3\rho_3$$

wodurch die selbstconjugirte Funktion übergeht in

$$\Phi_0(\rho) = -m_1\rho_1 S\rho_1\rho - m_2\rho_2 S\rho_2\rho - m_3\rho_3 S\rho_3\rho \quad \ldots \quad (f. 99)$$

Die Überführung der selbstconjugirten linearen Vektorfunktion in die letztere Gestalt wollen wir die rechtwinklige Transformation derselben nennen.

163. Eine andre Transformation der selbstconjugirten Funktion ist von HAMILTON die cyclische genannt worden. Dieselbe ist enthalten in der Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_0\rho = g\rho + h\,V\lambda\rho\mu \\ \text{oder} \\ \Phi_0\rho = (g - hS\lambda\mu)\rho + \lambda S\mu\rho + \mu S\lambda\rho \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (f. 100)$$

wo g und h constante Skalare, λ, μ Einheitsvektoren bestimmter Richtung bedeuten.

Diese Gröszen zu bestimmen, wenden wir die Gleichung (f. 100) auf die drei Einheitsvektoren ρ_1, ρ_2, ρ_3 an und erhalten dadurch

$$\left.\begin{array}{l}(m_1 - g + hS\lambda\mu)\rho_1 = h\lambda S\rho_1\mu + h\mu S\rho_1\lambda \\ (m_2 - g + hS\lambda\mu)\rho_2 = h\lambda S\rho_2\mu + h\mu S\rho_2\lambda \\ (m_3 - g + hS\lambda\mu)\rho_3 = h\lambda S\rho_3\mu + h\mu S\rho_2\lambda\end{array}\right\} \dots \quad (f.\ 101)$$

Wird nun weiter an eine jede dieser Gleichungen mit $S. V\lambda\mu$ operirt, so verschwinden die zweiten Seiten der Resultate identisch. Somit ist

$$\left.\begin{array}{l}m_1 - g + hS\lambda\mu = 0 \\ m_2 - g + hS\lambda\mu = 0 \\ m_3 - g + hS\lambda\mu = 0\end{array}\right\} \dots\dots \quad (f.\ 102)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}S.\rho_1 V\lambda\mu = 0 \\ S.\rho_2 V\lambda\mu = 0 \\ S.\rho_3 V\lambda\mu = 0\end{array}\right\} \dots\dots \quad (f.\ 103)$$

Nun können aber die drei Gleichungen (f. 103) nicht zugleich stattfinden, weil ρ_1, ρ_2, ρ_3 nicht complanar sind. Weiter können aber auch nicht, wie unmittelbar ersichtlich, zwei der Gleichungen (f. 102) zusammen gültig sein, wenn die Wurzeln der Gleichung (f. 98) von einander verschieden vorausgesetzt werden. Es kann daher nur eine der Gleichungen (f. 102) mit den beiden nicht correspondirenden der Gleichungen (f. 103) zugleich gültig sein. Wir setzen daher

$$m_1 - g + hS\lambda\mu = 0 \dots\dots \quad (f.\ 104)$$

und

$$S.\rho_2 V\lambda\mu = 0\,,\ S.\rho_3 V\lambda\mu = 0 \dots\dots \quad (f.\ 105)$$

somit

$$UV\lambda\mu = \rho_1 \dots\dots \quad (f.\ 106)$$

Durch die Relation (f. 104) gehen die beiden letzteren der Gleichungen (f. 101) über in

$$\left.\begin{array}{l}(m_2 - m_1)\rho_2 = h\lambda S\rho_2\mu + h\mu S\rho_2\lambda \\ (m_3 - m_1)\rho_3 = h\lambda S\rho_3\mu + h\mu S\rho_3\lambda\end{array}\right\} \dots \quad (f.\ 107)$$

Die Gleichung (f. 106) sagt aus, dass λ, μ beide in die Ebene der Vektoren ρ_2, ρ_3 fallen müssen. Setzen wir daher

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda = x\rho_2 + y\rho_3, & x^2 + y^2 = 1 \\ \mu = x_1\rho_2 + y_1\rho_3, & x_1^2 + y_1^2 = 1\end{array}\right\} \ldots \ldots (f.\ 108)$$

so ergibt die Substitution dieser Werte in ($f.$ 107)

$$(m_2 - m_1)\rho_2 = -2\,hxx_1\rho_2 - h\rho_3(yx_1 + xy_1)$$
$$(m_3 - m_1)\rho_3 = -h\rho_2(xy_1 + yx_1) - 2\,hyy_1\rho_3$$

und hieraus wird geschlossen

$$\left.\begin{array}{l}2hxx_1 = m_1 - m_2 \\ 2hyy_1 = m_1 - m_3 \\ xy_1 + yx_1 = 0\end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots (f.\ 109)$$

Es wird hierdurch weiter

$$\frac{xx_1}{yy_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 - m_3}, \quad \frac{x}{y} = -\frac{x_1}{y_1}$$

somit

$$\frac{x^2}{y^2} = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 - m_3} \ldots \ldots \ldots (f.\ 110)$$

Diese Gleichung ergibt nur reelle Werte für $\frac{x}{y}$, falls

$$\left.\begin{array}{l}m_2 > m_1 > m_3 \\ \text{oder} \\ m_3 > m_1 > m_2\end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots (f.\ 111)$$

Machen wir die erstere Annahme, so erhalten wir

$$\frac{x}{y} = \pm\sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 - m_3}} = -\frac{x_1}{y_1} \ldots \ldots (f.\ 112)$$

und mit Hülfe der Gleichungen ($f.$ 108) können nunmehr leicht x, y, x_1, y_1, einzeln bestimmt werden. Man erhält dadurch

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{m_2 - m_1}\,\rho_2 - \sqrt{m_1 - m_3}\,\rho_3}{\sqrt{m_2 - m_3}} \\ \mu = \pm\dfrac{\sqrt{m_2 - m_1}\,\rho_2 + \sqrt{m_1 - m_3}\,\rho_3}{\sqrt{m_2 - m_3}}\end{array}\right\} \ldots \ldots (f.\ 113)$$

Es folgt sodann weiter

$$S\lambda\mu = \frac{m_2 + m_3 - 2\,m_1}{m_2 - m_3} \ldots \ldots \ldots (f.\ 114)$$

und aus einer der Gleichungen ($f.$ 109)

$$h = \frac{m_2 - m_3}{2} \ldots \ldots \ldots (f.\ 115)$$

Schlieszlich ergibt ($f.$ 104) noch für die Grösze g den Wert

$$g = \frac{m_2 + m_3}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (f.\ 116)$$

und hiermit sind die Werte aller bei der cyclischen Transformation in Betracht kommenden Gröszen ermittelt.

164. Umgekehrt setzen die vorhergehenden Relationen uns in den Stand unmittelbar von der cyklischen Form der Vektorfunktion auf die rechtwinklige zu schlieszen.

Es ergibt sich nämlich daraus

$$m_2 = g + h, \quad m_3 = g - h \quad \ldots \ldots \ldots (f.\ 117)$$

und aus ($f.$ 104)

$$m_1 = g - hS\lambda\mu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (f.\ 118)$$

Noch wird aus ($f.$ 113) erhalten

$$\rho_2 = \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{2(1 + S\lambda\mu)}}, \quad \rho_3 = \frac{\mu + \lambda}{\sqrt{2(1 - S\lambda\mu)}} \quad \ldots (f.\ 119)$$

oder kürzer

$$\rho_2 = U(\mu - \lambda), \quad \rho_3 = U(\mu + \lambda). \quad \ldots \ldots (f.\ 120)$$

während schon

$$\rho_1 = UV\lambda\mu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (f.\ 121)$$

gefunden ist.

165. Ist die selbstconjugirte Funktion $\Phi_0\rho$ cyclisch transformirt, so ergibt sich daraus eine einfache Gestalt für die willkürliche lineare Vektorfunction. Denn nach ($f.$ 96) in Verbindung mit ($f.$ 100) erhält man nunmehr

$$\Phi\rho = g\rho + V\delta\rho + hV\lambda\rho\mu = V(g + \delta)\rho + hV\lambda\rho\mu$$

oder

$$\Phi\rho = Vq_0\rho + hV\lambda\rho\mu \quad \ldots \ldots \ldots (f.\ 122)$$

wo q_0 ein constanter Quaternion ist derart, dass

$$Sq_0 = g, \quad Vq_0 = \delta.$$

166. Schlieszlich seien noch die Transformationen erwähnt, welche von Hamilton die focale Transformationen der selbstconjugirten linearen Vektorfunktion genannt worden sind und welche durch die Gleichung

$$\Phi_0\rho = -a\lambda V\lambda\rho + b\mu S\mu\rho \quad \ldots \ldots \ldots (f.\ 123)$$

ausgesprochen werden. a und b bedeuten constante Skalare, λ, μ Einheitsvektoren bestimmter Richtung.

Man kann sodann auch schreiben

$$\Phi_0 \rho = a\rho + a\lambda S\lambda\rho + b\mu S\mu\rho. \dots\dots \quad (f. 124)$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf die drei Vektoren ρ_1, ρ_2, ρ_3 ergibt

$$\left.\begin{array}{l}(m_1 - a)\rho_1 = a\lambda S\lambda\rho_1 + b\mu S\mu\rho_1 \\ (m_2 - a)\rho_2 = a\lambda S\lambda\rho_2 + b\mu S\mu\rho_2 \\ (m_3 - a)\rho_3 = a\lambda S\lambda\rho_3 + b\mu S\mu\rho_2\end{array}\right\} \dots\dots \quad (f. 125)$$

und die Operation mit $S.V\lambda\mu$ an eine jede dieser Relationen führt zu den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}m_1 - a = 0 \\ m_2 - a = 0 \\ m_3 - a = 0\end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (f. 126)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}S.\rho_1 V\lambda\mu = 0 \\ S.\rho_2 V\lambda\mu = 0 \\ S.\rho_3 V\lambda\mu = 0\end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (f. 127)$$

Wie bei dem Vorhergehenden schlieszt man sodann weiter, dass

$$m_1 = a \dots\dots\dots\dots\dots \quad (f. 128)$$

und

$$UV\lambda\mu = \rho_1 \dots\dots\dots\dots \quad (f. 129)$$

und die erstere dieser Gleichungen reducirt die beiden letzteren der Relationen ($f.$ 125) zu den nachstehenden

$$\left.\begin{array}{l}(m_2 - m_1)\rho_2 = m_1\lambda S\lambda\rho_2 + b\mu S\mu\rho_2 \\ (m_3 - m_1)\rho_3 = m_1\lambda S\lambda\rho_3 + b\mu S\mu\rho_3\end{array}\right\} \dots\dots \quad (f. 130)$$

Nun setze man der Gleichung ($f.$ 129) entsprechend wieder

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda = x\rho_2 + y\rho_3, & x^2 + y^2 = 1 \\ \mu = x_1\rho_2 + y_1\rho_3, & x_1^2 + y_1^2 = 1\end{array}\right\} \dots\dots \quad (f. 131)$$

und führe diese Werte in die Gleichungen ($f.$ 130) ein. Dadurch wird erhalten

$$\left.\begin{array}{l}m_1 x^2 + b x_1^2 = m_1 - m_2 \\ m_1 y^2 + b y_1^2 = m_1 - m_3 \\ m_1 xy + b x_1 y_1 = 0\end{array}\right\} \dots\dots \quad (f. 132)$$

Die Addition der beiden ersteren dieser Relationen in Verbindung mit den Gleichungen ($f.$ 131) ergibt unmittelbar

$$b = m_1 - m_2 - m_3 \dots\dots\dots \quad (f. 133)$$

und weiter findet man durch Auflösung für x, y, x_1, y_1 Werte welche sich in die nachstehende Gestalt bringen lassen

$$x^2 = \frac{m_1^{-1} - m_2^{-1}}{m_3^{-1} - m_2^{-1}},\ y^2 = \frac{m_1^{-1} - m_3^{-1}}{m_2^{-1} - m_3^{-1}} \quad \ldots\ldots (f.\,134)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{m_3^{-2}(m_2^{-1} - m_1^{-1})}{(m_2^{-1} - m_3^{-1})(m_1^{-1}m_2^{-1} + m_1^{-1}m_3^{-1} - m_2^{-1}m_3^{-1})} \\ y_1^2 &= \frac{m_2^{-2}(m_3^{-2} - m_1^{-1})}{(m_3^{-1} - m_2^{-1})(m_1^{-1}m_2^{-1} + m_1^{-1}m_3^{-1} - m_2^{-1}m_3^{-1})} \end{aligned}\right\} . \quad (f.\,135)$$

Die Werte für x^2, y^2 sind nur positiv, wenn einer der Ungleichungen

$$m_2^{-1} > m_1^{-1} > m_3^{-1},\ m_3^{-1} > m_1^{-1} > m_2^{-1} \quad \ldots\ldots (f.\,136)$$

genügt wird.

Es werden sodann aber auch die Werte für x_1^2, y_1^2 reell sein müssen, wie unmittelbar erhellt, wenn man noch beachtet, dass

$$m_1^{-1}m_2^{-1} + m_1^{-1}m_3^{-1} - m_2^{-1}m_3^{-1} = m_1^{-2} - (m_1^{-1} - m_2^{-1})(m_1^{-1} - m_3^{-1})$$

Hierdurch ist nun festgesetzt, welche der Wurzeln der Gleichung (*f.* 98) für m_1 zu wählen sei.

Hat man in dieser Weise die Gröszen x^2, y^2, x_1^2, y_1^2 bestimmt, so müssen noch die Zeichen der Coefficienten x, y, x_1, y_1 der Gleichung

$$m_1 xy + b x_1 y_1 = 0$$

entsprechend gewählt werden. Es wird hierdurch zu Tage treten, dass diese Transformation auf zweifache Weise stattfinden kann.

167. Man könnte wieder umgekehrt fragen aus der focalen Form der linearen Vektorfunktion unmittelbar auf die rechtwinklige zu schlieszen. Es wird zu diesem Zwecke hinreichen aus den vorangegangenen Gleichungen die Gröszen m_1, m_2, m_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3 zu bestimmen.

Nach (*f.* 128) (*f.* 129) ist schon bekannt

$$m_1 = a, \quad \rho_1 = UV\lambda\mu$$

Aus (*f.* 131) erfolgt durch Multiplikation

$$- S\lambda\mu = xx_1 + yy_1$$

und indem man quadrirt

$$(S\lambda\mu)^2 = x^2x_1^2 + y^2y_1^2 + 2xyx_1y_1 = x^2x_1^2 + y^2y_1^2 - 2\frac{m_1}{b}x^2y^2 \text{ nach } (f.\,132).$$

Die Substitution der für x^2, x_1^2, y^2, y_1^2 gefundenen Werte ergibt in Verbindung mit (*f.* 133)

$$m_2 + m_3 = a - b$$
$$m_2 m_3 = - ab(S\lambda\mu)^2$$

und hieraus erhellt sofort, dass m_2, m_3 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$m^2 - (a - b)\, m - ab(S\lambda\mu)^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 137)$$

sein müssen. Weil aber nach (b. 151) (b. 135)

$$S.q^2 = Sq^2 - N\,Vq \quad \text{und} \quad Sq^2 + N\,Vq = Tq^2$$

so ergibt sich

$$2\,Sq^2 = S.q^2 + Tq^2$$

und daher auch

$$2(S\lambda\mu)^2 = S.(\lambda\mu)^2 + 1.$$

Die Gleichung (f. 137) kann deshalb auch in der nachstehenden Gestalt erhalten werden

$$m^2 - (a - b)\, m - ab\,\frac{1 + S.(\lambda\mu)^2}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 138)$$

Der Annahme (f. 136) gemäsz müssen hieraus m_2 und m_3 ermittelt werden, wodurch man zu den nachstehenden Werten geführt wird:

$$\frac{a - b}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2\,ab\, S.(\lambda\mu)^2}$$

Um schlieszlich noch ρ_2, ρ_3 zu bestimmen, können wir wie nachstehend verfahren. Die beiden Gleichungen (f. 131)

$$\lambda = x\rho_2 + y\rho_3$$
$$\mu = x_1\rho_2 + y_1\rho_3$$

multiplicire man mit m_3, $-bS\lambda\mu$ bzhw. und addire die Resultate, indem in der zweiten Seite $S\lambda\mu$ durch $-xx_1 - yy_1$ ersetzt wird. Es entsteht in dieser Weise

$$\begin{aligned} m_3\lambda - b\mu S\lambda\mu &= \rho_2[m_3x + bx_1(xx_1 + yy_1)] \\ &= \rho_3[m_3y + by_1(xx_1 + yy_1)] \end{aligned}$$

Nun ist jedoch weiter

$$\begin{aligned} m_3x + bx_1(xx_1 + yy_1) &= x(m_3 + bx_1^2) + byx_1y_1 \\ &= x(m_3 + bx_1^2 - m_1y^2) \\ &= x[m_3 + m_1 - m_2 - m_1(x^2 + y^2)] \\ &= x(m_3 - m_2) \end{aligned} \quad \text{nach}(f.132)$$

$$\begin{aligned} m_3y + by_1(xx_1 + yy_1) &= y(m_3 + by_1^2) + bx_1y_1x \\ &= y(m_3 + by_1^2 - m_1x^2) \\ &= y[m_3 + m_1 - m_3 - m_1(x^2 + y^2)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{nach}(f.132)$$

Somit wird die zuletzt erhaltene Gleichung

$$x(m_3 - m_2)\rho_2 = m_3\lambda - b\mu S\lambda\mu$$

$$\rho_2 = \pm U(m_3\lambda - b\mu S\lambda\mu) \quad \ldots\ldots (f.\,139)$$

je nachdem $x(m_3 - m_2)$ positiv oder negativ ist.

In gleicher Weise wird erhalten

$$\rho_3 = \pm U(m_2\lambda - b\mu S\lambda\mu) \quad \ldots\ldots (f.\,140)$$

je nachdem $y(m_2 - m_3)$ positiv oder negativ ist.

In dem Vorhergehenden ist nur der Fall betrachtet, wo die Wurzeln der Gleichung ($f.$ 98) sämtlich von einander und von der Null verschieden sind. Wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft, so treten Vereinfachungen ein, auf die wir hier aber nicht näher eingehen wollen.

168. Die in den vorigen Artikeln erörterte Transformation ist nicht die einzige focale. Eine andre, welche von Hamilton die bifocale Transformation genannt worden ist, möge noch kurz dargelegt werden.

Wir sahen, dass man im allgemeinen auf zwei focale Transformationen geführt wird, welche durch das Zeichen der Gröszen $x : y$ und $x_1 : y_1$ verschieden sind. Es entstehen aus den Gleichungen ($f.$ 131) daher auch zwei Vektorenpaare, welche wir mit λ, μ; λ_1, μ_1 bezeichnen wollen, sodass

$$\lambda = x\rho_2 + y\rho_3, \quad \lambda_1 = x\rho_2 - y\rho_3 \quad \ldots\ldots (f.\,141)$$

$$\mu = x_1\rho_2 + y_1\rho_3, \quad \mu_1 = x_1\rho_2 - y_1\rho_3 \quad \ldots\ldots (f.\,142)$$

Wir können nun auch in $\Phi_0\rho$ statt λ, μ die beiden Vektoren λ, λ_1 einführen und die dadurch erhaltene Form ist eine Hamiltonsche bifocale Form.

Aus ($f.$ 141) erfolgt zunächst

$$\rho_2 = \frac{\lambda + \lambda_1}{2\,x}, \quad \rho_3 = \frac{\lambda - \lambda_1}{2\,y}$$

und die Substitution dieser Werte in die erste der Gleichungen ($f.$ 142) ergibt

$$\mu = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{x_1}{x} + \frac{y_1}{y}\right) + \frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{x_1}{x} - \frac{y_1}{y}\right).$$

Führt man diesen Wert in die focale Form ($f.$ 124) ein, so wird erhalten

$$\Phi_0\rho = a\rho + \left[a + \frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x} + \frac{y_1}{y}\right)^2\right]\lambda S\lambda\rho +$$

$$+\frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x}-\frac{y_1}{y}\right)^2\lambda_1 S\lambda_1\rho+\frac{b}{4}\left(\frac{x_1^2}{x^2}-\frac{y_1^2}{y^2}\right)(\lambda S\lambda_1\rho+\lambda_1 S\lambda\rho).$$

Nun ist jedoch

$$a+\frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x}+\frac{y_1}{y}\right)^2=\frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x}-\frac{y_1}{y}\right)^2+a+\frac{bx_1y_1}{xy}=$$

$$=\frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x}-\frac{y_1}{y}\right)^2 \text{ nach } (f.\ 128)\ (f.\ 132)$$

Dadurch wird

$$\Phi_0\rho=a\rho+\frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x}-\frac{y_1}{y}\right)^2(\lambda S\lambda\rho+\lambda_1 S\lambda_1\rho)$$

$$+\frac{b}{4}\left(\frac{x_1^2}{x^2}-\frac{y_1^2}{y^2}\right)(\lambda S\lambda_1\rho+\lambda_1 S\lambda\rho),$$

und wenn noch die Werte für $a, b, x^2, x_1^2, y^2, y_1^2$ aus ($f.$ 128) ($f.$ 133) ($f.$ 134) ($f.$ 135) eingeführt werden

$$\Phi_0\rho=m_1\rho-\frac{m_1(m_2-m_3)}{4\,m_2m_3}\left[(m_2-m_3)(\lambda S\lambda\rho+\lambda_1 S\lambda_1\rho)+\right.$$

$$\left.+(m_2+m_3)(\lambda S\lambda_1\rho+\lambda_1 S\lambda\rho)\right].$$

Schlieszlich sei gesetzt

$$\frac{m_2+m_3}{m_2-m_3}=-e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 143)$$

So wird erhalten

$$\Phi_0\rho=\frac{m_1}{e^2-1}[(e^2-1)\rho-(\lambda S\lambda\rho+\lambda_1 S\lambda_1\rho)+e(\lambda S\lambda_1\rho+\lambda_1 S\lambda\rho)] \quad (f.\ 144)$$

169. Eine zweite allgemeine Lösungsmethode der linearen Quaterniongleichungen ist in diesem Artikel auseinandergesetzt.

Dieselbe gründet sich auf den im zweiten Abschnitte bewiesenen Satz, dass die Gleichheit zweier Quaternionen vier Skalargleichungen in sich schlieszt.

Diese Methode anzuwenden, ersetze man jeden in der Gleichung vorhandenen Quaternion durch die viergliedrige Grundform, und bringe nachher die beiden Seiten der Gleichung wieder in diese Gestalt.

Wir wollen als Beispiel eine der vorher schon gelösten Gleichungen wählen, nämlich

$$V\alpha\rho=\gamma.$$

Es sei

$$\alpha = a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad \rho = xi + yj + zk, \quad \gamma = c_1 i + c_2 j + c_3 k,$$

wo Skalarteile natürlich nicht vorkommen.

Nach (b. 169) ist sodann

$$V\alpha\rho = i(za_2 - ya_3) + j(xa_3 - za_1) + k(ya_1 - xa_2)$$

und dieser Ausdruck soll mit γ identisch sein. Man erhält hieraus die drei Skalargleichungen:

$$za_2 - ya_3 = c_1, \quad xa_3 - za_1 = c_2, \quad ya_1 - xa_2 = c_3 \quad . \, (f.\ 145)$$

Dieselben schlieszen in sich die Skalarrelation

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \text{ oder } S\alpha\gamma = 0$$

wie auch vorher gefunden, und bei dieser Annahme sind die Gleichungen (f. 145) nicht mehr unabhängig von einander. Man hat somit nur zwei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten x, y, z, wodurch in der Lösung ein unbestimmter Skalar bleiben musz, in Übereinstimmung mit dem vorher erhaltenen Resultate.

Bezeichnen wir jenen Skalar mit h, so sind bekanntlich die Lösungen der Gleichungen (f. 145)

$$x = a_1 h + \tfrac{1}{3}\left(\frac{c_2}{a_3} - \frac{c_3}{a_2}\right)$$

$$y = a_2 h + \tfrac{1}{3}\left(\frac{c_3}{a_1} - \frac{c_1}{a_3}\right)$$

$$z = a_3 h + \tfrac{1}{3}\left(\frac{c_1}{a_2} - \frac{c_2}{a_1}\right)$$

und hierdurch ist nun auch der Wert von ρ bekannt; doch wollen wir nicht länger bei dieser Methode verweilen.

170. Die bisher auseinandergesetzten allgemeinen Lösungsmethoden erfordern bei vielen Gleichungen umständliche Rechnungen, welche durch Anwendung specieller Methoden leicht vermieden werden können. Es sei uns gestattet diese Behauptung an einigen Beispielen zu erweisen. Wir wählen dazu wieder die schon nach der allgemeinen Methode gelösten Gleichungen.

1°. $$V.\alpha\rho\beta = \gamma.$$

Wir operiren an diese Gleichung mit dem Symbol $S.\alpha$ und erhalten dadurch

$$S.\alpha\gamma = S.\alpha V\alpha\rho\beta = S.\alpha\alpha\rho\beta = \alpha^2 S\beta\rho$$

oder kürzer

$$S.\beta\rho = \alpha^{-2}S\alpha\gamma.$$

Ebenfalls

$$S.\beta\gamma = S.\beta V\alpha\rho\beta = S.\beta V\beta\rho\alpha \text{ nach } (c.\,42) = \beta^2 S\alpha\rho$$

oder kurz

$$S.\alpha\rho = \beta^{-2}S.\beta\gamma.$$

Schreiben wir noch statt der gegebenen Gleichung

$$\alpha S\beta\rho - \rho S\alpha\beta + \beta S\alpha\rho = \gamma$$

so erhalten wir, wenn die vorhergehenden Resultate beachtet werden

$$\rho S\alpha\beta = -\gamma + \alpha^{-1}S.\alpha\gamma + \beta^{-1}S.\beta\gamma$$

in Übereinstimmung mit (*f.* 70).

2⁰. $V.\rho\alpha\beta = \gamma$ oder $\rho S\alpha\beta - \alpha S\beta\rho + \beta S\alpha\rho = \gamma$

Wie bei der vorigen Gleichung erhält man

$$S.\alpha\gamma = S.\alpha V\rho\alpha\beta = S.\alpha(\rho S\alpha\beta - \alpha S\beta\rho + \beta S\alpha\rho) = 2S\alpha\rho S\alpha\beta - \alpha^2 S\beta\rho$$
$$S.\beta\gamma = S.\beta V\rho\alpha\beta = S.\beta V\beta\alpha\rho = S.\beta\beta\alpha\rho = \beta^2 S\alpha\rho.$$

Durch Auflösung erfolgt:

$$S\alpha\rho = \beta^{-2}S\beta\gamma,\quad S.\beta\rho = -\alpha^{-2}S\alpha\gamma + 2\alpha^{-2}\beta^{-2}S\alpha\beta S\beta\gamma$$

Bei der Substitution dieser Werte in die ursprüngliche Gleichung wird erhalten

$$\rho S\alpha\beta = \gamma - \alpha^{-1}S\alpha\gamma + 2\alpha^{-1}\beta^{-2}S\alpha\beta S\beta\gamma - \beta^{-1}S\beta\gamma$$

wie in (*f.* 72)

3⁰. $$V.\alpha\rho = \gamma.$$

Es kann nunmehr $S.\alpha\rho$ willkürlich gewählt werden z. B.

$$S.\alpha\rho = x.$$

Durch Addition zu der vorliegenden Gleichung wird

$$\alpha\rho = \gamma + x \text{ oder } \rho = \alpha^{-1}(\gamma + x).$$

Dieses Resultat ist in (*f.* 74) enthalten.

Dasselbe Verfahren wäre jedoch bei den beiden vorangegangenen Gleichungen nicht ohne Weiteres gestattet. Denn man hätte sodann aus der sub 2⁰ behandelten Gleichung erhalten

$$\rho = (x + \gamma)\beta^{-1}\alpha^{-1},$$

was offenbar im allgemeinen unmöglich ist, weil die erste Seite ein rechter Quotient, die zweite ein willkürlicher Quaternion ist. Es musz somit die Grösze x noch so bestimmt werden, dass

$$S.(x + \gamma)\beta^{-1}\alpha^{-1} = 0,$$

woraus

$$x = -\frac{S.\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}}{S.\beta^{-1}\alpha^{-1}}.$$

Die Lösung der betrachteten Gleichung kann daher geschrieben werden

$$\rho = \left(\gamma - \frac{S.\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}}{S.\beta^{-1}\alpha^{-1}}\right)\beta^{-1}\alpha^{-1}.$$

Eine nützliche Übung gewährt die Zurückführung dieses Ausdruckes auf die Form (*f.* 72) oder umgekehrt. Wir wollen nur noch die zuletzt erhaltene Lösung ein wenig umgestalten.

Es ist

$$S.\beta^{-1}\alpha^{-1} = S.\beta^{-2}\beta\alpha\alpha^{-2} = \alpha^{-2}\beta^{-2}S\alpha\beta$$
$$S.\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1} = \alpha^{-2}\beta^{-2}S.\gamma\beta\alpha = -\alpha^{-2}\beta^{-2}S.\alpha\beta\gamma.$$

Somit wird:

$$\rho = \left(\gamma + \frac{S.\alpha\beta\gamma}{S.\alpha\beta}\right)\beta^{-1}\alpha^{-1}. \quad \ldots\ldots (f.\ 146)$$

171. Hamilton hat auch eine direkte Lösung der allgemeinen linearen Quaterniongleichung mitgeteilt, welche nicht eine vorangehende Reduktion zu einer linearen Vektorgleichung eines Vektors voraussetzt.

Wir wollen dieselbe in den nächstfolgenden Artikeln erörtern.

Es sei $f(q) = r$ die gegebene Gleichung, q der unbekannte, r ein bekannt vorausgesetzter Quaternion. Der Einfachheit wegen wollen wir auch hier wieder das Resultat der Operation f an einen Quaternion q im allgemeinen mit fq bezeichnen und nur $f(q)$ schreiben, wenn q aus einer Summe besteht oder eine verwickelte Gestalt hat. Es hat die Funktion f die nachfolgenden Eigenschaften:

$$f(q + q') = fq + fq' \quad \ldots\ldots\ldots (f.\ 147)$$

wegen der Linearität;

$$f(xq) = xfq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 148)$$

wegen der Relation (*f.* 147).

Die Lösung der vorliegenden Gleichung wollen wir mit $f^{-1}r$ bezeichnen. Es ist deshalb

$$q = f^{-1}r, \text{ wenn } fq = r \quad \ldots\ldots\ldots (f.\ 149)$$

Wie in Art. 138 kann bewiesen werden, dass

$$f^{-1}r + f^{-1}r' + \ldots\ldots = f^{-1}(r + r' + \ldots\ldots) \quad \ldots (f.\ 150)$$

$$f^{-1}(xr) = xf^{-1}r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\ 151)$$

Wenn wir eine neue lineare Funktion f' construiren, welche der Relation genügt

$$S.pfq = S.qf'p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\ 152)$$

so können wir dieselbe die Conjugirte der Funktion f nennen.

Setzen wir voraus die lineare Gleichung sei in die Form ($f.$ 7) gebracht, so ist es ein Leichtes die Funktion f' zu finden. Denn wenn wir an die erste Seite der Gleichung ($f.$ 7) mit $S.p$ operiren und jedes Glied für sich nehmen, so erhalten wir

$$Spaqb = S.(pa)(qb) = S.(qb)(pa) = S.qbpa$$
$$S.pcSeq = SeqSpc = SqeScp = S.qeScp.$$

Es geht hieraus hervor, dass die Funktion f' aus f erhalten wird, indem die Gröszen b mit a, und die Gröszen c mit e umgetauscht werden.

Wenn man in

$$f = \Sigma aqb + \Sigma cSeq,$$

q der Einheit gleich setzt, und in gleicher Weise in $f'q$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} f1 &= \Sigma ab + \Sigma cSe \\ f'1 &= \Sigma ba + \Sigma eSc \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\ 153)$$

Es ist daraus ersichtlich, dass

$$S.f1 = S.f'1, \text{ aber } Vf1 \gtrless Vf'1.$$

Wir wollen demnach und der Kürze halber setzen:

$$S.f1 = S.f'1 = c, \quad Vf1 = \varepsilon, \quad Vf'1 = \varepsilon' \quad . \; . \; . \quad (f.\ 154)$$

wodurch zugleich die Relationen

$$f1 = c + \varepsilon, \; f'1 = c + \varepsilon' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\ 155)$$

erhalten werden. Weiter kann man wie nachstehend transformiren:

$$S.fq = S.1fq = S.qf'1 \text{ nach } (f.\ 152) = S.q(c + \varepsilon') = cSq + S.\varepsilon'q,$$
$$V.fq = V.f(Sq + Vq) = V(fSq + fVq) \text{ nach } (f.\ 147) = V.fSq + V.fVq$$
$$= V.Sqf'1 + V.fVq = Sq.Vf'1 + V.fVq = \varepsilon'Sq + \Phi Vq$$

oder kürzer

$$S.fq = cSq + S.\varepsilon'q, \quad Vfq = \varepsilon'Sq + \Phi Vq \quad . \; . \; . \quad (f.\ 156)$$

wo ΦVq eine lineare Vektorfunktion des Vektors Vq ist. Denn man erhält

$$\Phi Vq = V.fVq = \Sigma V.a(Vq)b + \Sigma V.cS(eVq).$$

Jedes Glied unter dem ersten Zeichen Σ kann wie nachstehend transformirt werden

$$V.a(Vq)b = V.aVq(Sb + Vb) = V.aSbVq + VaVqVb =$$
$$= V.aSbVq + V.(Sa + Va)VqVb$$
$$= V.aSbVq - V.SaVbVq + V.VaVqVb$$
$$= V.(aSb - SaVb)Vq + VaS.VbVq - VqS.VaVb + $$
$$+ VbS.VaVq$$
$$= V.(aSb - SaVb - S.VaVb)Vq + VaS.VbVq + Vb.SaVq$$

während weiter

$$V.cS(eVq) = S(eVq)Vc = VcS(eVq) = VcS.VeVq$$

und hieraus geht hervor, dass ΦVq in der Tat die Gestalt der linearen Vektorfunktion ($f.$ 16) besitzt. Auch hätte man zeigen können, dass die Funktion $V.fVq$ der Gleichung ($f.$ 19) genügt.

Aus den beiden Gleichungen ($f.$ 156) erfolgt, dass allgemein

$$fq = (c + \varepsilon)Sq + S.\varepsilon' q + \Phi Vq \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 157)$$

gesetzt werden kann.

Die zweite Seite der gegebenen Gleichung wollen wir auch transformiren

$$r = Sr + Vr = Sr + \Phi\Phi^{-1}Vr = Sr + \Phi\rho,$$

wenn ρ definirt wird durch die Gleichung

$$\rho = \Phi^{-1}Vr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 158)$$

Die ursprünglich vorhandene Gleichung lautet nunmehr

$$f(q) = Sr + \Phi\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 159)$$

Weiter wollen wir nach HAMILTON setzen

$$q = q' + \rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 160)$$

wo q' ein neuer Quaternion sei, welchen wir sogleich auswerten werden.

Es wird sodann

$$fq' = f(q - \rho) = fq - f\rho = Sr + \Phi\rho - f\rho \quad \ldots \quad (f.\ 161)$$

Die letztere Funktion kann leicht bestimmt werden. Denn, wenn man für f die Form ($f.$ 157) wählt, so wird erhalten

$$f\rho = (c + e)S\rho + S.\varepsilon'\rho + \Phi\rho = S.\varepsilon'\rho + \Phi\rho$$

und hiermit geht die Gleichung ($f.$ 161) über in

$$fq' = Sr - S.\varepsilon'\rho = S(r - \varepsilon'\rho) \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 162)$$

Demgemäsz wird

$q' = f^{-1}S(r - \varepsilon'\rho)$ nach $(f. 149) = S(r - \varepsilon'\rho)f^{-1}1$ nach $(f. 151)$ $(f. 163)$

Weil r, ε', ρ bekannte Gröszen sind, oder wenigstens Gröszen, deren Werte nach vorigen Methoden aus der gegebenen Gleichung bestimmt werden können, so bleibt nur noch $f^{-1}1$ zu ermitteln. Es ist dieses Symbol der Wert des Quaternions q_0, welches der Gleichung

$$fq_0 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f. 164)$$

genügt.

Die Skalar- und Vektorteile des Quaternions q_0 seien a_0, α_0 bzhw., so ist

$f(a_0 + \alpha_0) = 1$ oder nach $(f. 157)$ $(c + \varepsilon)a_0 + S\,\varepsilon'\alpha_0 + \Phi\alpha_0 = 1$

und diese Relation führt, indem man die Skalare und Vektoren trennt, zu den beiden anderen

$$ca_0 + S.\varepsilon'\alpha_0 = 1, \quad a_0\varepsilon + \Phi\alpha_0 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (f. 165)$$

Aus der zweiten dieser Relationen wird α_0 leicht gelöst. Dadurch wird erhalten

$$\alpha_0 = -\Phi^{-1}(a_0\varepsilon) = -a_0\Phi^{-1}\varepsilon$$

und indem dieser Wert in die erste der Gleichungen $(f. 165)$ eingesetzt wird

$$a_0 = \frac{1}{c - S.\varepsilon'\Phi^{-1}\varepsilon} \text{ und hiermit } \alpha_0 = -\frac{\Phi^{-1}\varepsilon}{c - S.\varepsilon'\Phi^{-1}\varepsilon} \quad . \quad (f. 166)$$

Schlieszlich ist

$$f^{-1}1 = a_0 + \alpha_0 = \frac{1 - \Phi^{-1}\varepsilon}{c - S.\varepsilon'\Phi^{-1}\varepsilon} \quad \ldots\ldots \quad (f. 167)$$

und nach $(f. 160)$ $(f. 163)$

$$q = \rho + \frac{S(r - \varepsilon'\rho)}{c - S.\varepsilon'\Phi^{-1}\varepsilon}[1 - \Phi^{-1}\varepsilon]. \quad \ldots\ldots \quad (f. 168)$$

Es wäre somit, um den Wert des unbekannten Quaternions q zu erhalten, notwendig erst die Funktion Φ^{-1} zu bestimmen, was auf die Lösung einer Vektorgleichung hinauskommt. Man kann jedoch weiter gehen und dadurch diese Funktion ganz eliminiren.

Wir nehmen zu diesem Zwecke die Gleichung $(f. 46)$ wieder auf und setzen

$$x\Phi^{-1} = x_1 - x_2\Phi + \Phi^2 = \chi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f. 169)$$

wo χ eine neue Funktion ist. Wenn wir sodann noch einen

neuen Skalar y einführen, den wir definiren durch die Gleichung

$$xc - S.\varepsilon'\chi\varepsilon = y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f. 170)$$

so erhalten wir die nachstehenden Transformationen. Nach ($f.$ 167) kann nun auch geschrieben werden

$$f^{-1}1 = \frac{x - x\Phi^{-1}\varepsilon}{xc - S.\varepsilon' x\Phi^{-1}\varepsilon} = \frac{x - \chi\varepsilon}{y}$$

somit

$$yf^{-1}1 = x - \chi\varepsilon$$

$$f^{-1}y = x - \chi\varepsilon \text{ nach } (f. 151)$$

$$y = f[x - \chi\varepsilon] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f. 171)$$

Und weiter

$$yq = y\rho + \frac{yS(r - \varepsilon'\rho)}{c - S.\varepsilon'\Phi^{-1}\varepsilon}[1 - \Phi^{-1}\varepsilon]$$

$$= [xc - S.\varepsilon'\chi\varepsilon]\rho + xS(r - \varepsilon'\rho).[1 - \Phi^{-1}\varepsilon]$$

$$= [xc - S.\varepsilon'\chi\varepsilon]\rho + [x - \chi\varepsilon]S(r - \varepsilon'\rho)$$

Indem die Produkte berechnet und die Glieder umgetauscht werden

$$yq = [x - \chi\varepsilon]Sr + cx\rho - S.\varepsilon' x\rho + \chi\varepsilon.S\varepsilon'\rho - \rho S.\varepsilon'\chi\varepsilon$$

$$= [x - \chi\varepsilon]Sr + c\chi Vr - S.\varepsilon'\chi Vr + V.\varepsilon' V(\rho\chi\varepsilon)$$

wobei zuletzt die Formel ($c.$ 40) angewandt ist.

Eine weitere Umgestaltung wollen wir getrennt vornehmen und greifen zuerst ein wenig zurück. Indem man wie in Art. 143 verfährt, kann die Formel erhalten werden

$$x'\Phi'^{-1} V\lambda\mu = V.\Phi\lambda\Phi\mu$$

und die Operation an diese Gleichung mit Φ' ergibt

$$x' V\lambda\mu = \Phi'[V.\Phi\lambda\Phi\mu]$$

wo x' nach ($f.$ 34) berechnet wird, wenn man darin die Funktion Φ' durch Φ ersetzt. Es ist jedoch in Art. 159 gezeigt, dass $x' = x$ sein musz.

Die vorige Gleichung lässt sich demnach schreiben

$$xV\lambda\mu = \Phi'[V.\Phi\lambda\Phi\mu]$$

und diese Relation wollen wir zu unsrer Transformation anwenden. Denn es wird nach derselben

$$xV\rho\chi\varepsilon = \Phi'[V.\Phi\rho\Phi\chi\varepsilon] = \Phi'[V.\Phi\Phi^{-1}Vr\Phi(x\Phi^{-1}\varepsilon)] \text{nach} (f.158)(f.169)$$

$$= \Phi'[V.(Vr)x\varepsilon] = - x\Phi'(V.\varepsilon Vr)$$

oder schlieszlich

$$V.\rho\chi\varepsilon = -\Phi'(V.\varepsilon Vr) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f. 172)$$

Setzt man diesen Wert in den für yq erhaltenen Ausdruck, so wird

$$yq = [x - \chi\varepsilon]Sr + c\chi Vr - S.\varepsilon'\chi Vr - V.\varepsilon'\Phi'(V.\varepsilon Vr) \quad (f. 173)$$

Der unbekannte Quaternion q ist durch diese Gleichung ganz in directen Operationssymbolen ausgedrückt.

172. Wir wollen weiter noch zusehen, welche Änderungen die eingeführten Gröszen erfahren, wenn f durch $f+m$ ersetzt wird, wo m Skalar ist. Wir bezeichnen die Werte, welche y, x, χ, c, Φ, Φ' dadurch annehmen mit y_m, x_m, χ_m, c_m, Φ_m, Φ'_m bzhw.

Aus der Bedeutung der Gröszen ε, ε' leuchtet unmittelbar ein, dass dieselben durch die Substitution nicht beeinfluszt werden können. Auch kann leicht die Richtigkeit der nachstehenden Formeln dargetan werden.

$$c_m = c + m\,, \; \Phi_m = \Phi + m\,, \; \Phi'_m = \Phi' + m \; . \; . \; (f. 174)$$

Denn es ist nach $(f. 154)$

$$c = Sf1$$

somit

$$c_m = S.(f+m)1 = Sf1 + Sm = c + m.$$

Φ_m soll weiter aus $(f+m)q$ in derselben Weise hergeleitet werden wie Φ aus $f(q)$. Beachten wir die Gleichung $(f. 156)$, welche die Funktion Φ definirt, oder

$$\Phi Vq = V.fVq,$$

so wird

$$\Phi_m = V.(f+m)Vq = V.fVq + V.mVq = \Phi Vq + mVq = (\Phi + m)Vq$$

Analoges gilt für die conjugirte Funktion Φ'.

Die Änderungen, welche x und χ erfahren, sind nach den vorigen Artikeln bekannt. Es ist nämlich

$$x_m = x + mx_1 + m^2x_2 + m^3 \text{ nach } (f. 42);$$

χ_m ist der Wert, welchen $x\Phi^{-1}$ durch die Substitution erhält, oder

$$\chi_m = x(\Phi + m)^{-1} = x\Phi^{-1} + m\psi + m^2 \text{ nach } (f. 38)$$
$$= \chi + m\psi + m^2 \text{ nach } (f. 169)$$

Nach der Definitionsgleichung $(f. 170)$ der Grösze y ist schlieszlich

$$y_m = c_m x_m - S.\varepsilon'\chi_m\varepsilon$$
$$= (c+m)(x + mx_1 + m^2x_2 + m^3) - S.\varepsilon'[\chi\varepsilon + m\psi\varepsilon + m^2\varepsilon]$$

$$y_m = y + my_1 + m^2y_2 + m^3y_3 + m^4 \; . \; . \; . \; . \; (f. 175)$$

wenn die neuen Constanten y_1, y_2, y_3 nach den Gleichungen (f. 176) eingeführt werden

$$y_1 = x + cx_1 - S.\varepsilon'\psi\varepsilon\,, \; y_2 = x_1 + cx_2 - S.\varepsilon'\varepsilon\,, \; y_3 = x_2 + c \quad (f. 176)$$

Nach dieser Vorbereitung können wir leicht ersehen, welche Änderung die Gleichung (f. 173) erfährt, wenn noch beachtet wird, dass

$$q = f^{-1}r.$$

Es wird

$$\begin{aligned} & y_m(f+m)^{-1}r = \\ & = [x_m - \chi_m\varepsilon]\, Sr + c_m\chi_m\, Vr - S.\varepsilon'\chi_m\, Vr - V.\varepsilon'\Phi'_m(V.\varepsilon\, Vr) \\ & = [x + x_1 m + x_2 m^2 + m^3 - \chi\varepsilon - m\psi\varepsilon - m^2\varepsilon]\, Sr + \\ & \quad + (c+m)\,[\chi + m\psi + m^2]\, Vr - S.\varepsilon'(\chi + m\psi + m^2)\, Vr \\ & \qquad\qquad - V.\varepsilon'(\Phi' + m)(V.\varepsilon\, Vr) \\ & = [x - \chi\varepsilon]Sr + c\chi\, Vr - S.\varepsilon'\chi\, Vr - V.\varepsilon'\Phi'(V.\varepsilon\, Vr) + \\ & \quad + m[(x_1 - \psi\varepsilon)Sr + (c\psi + \chi)\, Vr - S.\varepsilon'\psi\, Vr - V.\varepsilon'\, V(\varepsilon\, Vr)] + \\ & \quad + m^2[(x_2 - \varepsilon)Sr + (c + \psi)\, Vr - S.\varepsilon'\, Vr] + m^3 r \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} y_m(f+m)^{-1}r &= yf^{-1}r + mFr + m^2Gr + m^3r = \\ &= [yf^{-1} + mF + m^2G + m^3]r \; . \; . \; . \; . \; . \; (f. 177) \end{aligned}$$

wenn die neuen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} Fr &= [x_1 - \psi\varepsilon]\, Sr + (c\psi + \chi)\, Vr - S.\varepsilon'\psi\, Vr - V.\varepsilon'\, V(\varepsilon\, Vr) \\ Gr &= (x_2 - \varepsilon)Sr + (c + \psi)\, Vr - S.\varepsilon'\, Vr \end{aligned}\right\} \quad (f. 178)$$

eingeführt werden.

Indem an die Gleichung (f. 177) mit $f + m$ operirt wird, erhält man

$$y_m = y + m(fF + yf^{-1}) + m^2(fG + F) + m^3(f + G) + m^4 \quad (f. 179)$$

eine symbolische Beziehung, welche mit (f. 175) verglichen werden kann, wodurch sich ergibt, wenn die Coefficienten gleicher Potenzen von m einander gleichgesetzt werden,

$$y_1 = fF + yf^{-1}, \; y_2 = fG + F, \; y_3 = f + G \; . \; . \; (f. 180)$$

Zwischen diesen Gleichungen können die Symbole F, G eliminirt werden. Es entsteht dadurch

$$G = y_3 - f, \; F = y_2 - y_3 f + f^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (f. 181)$$

und

$$yf^{-1} = y_1 - y_2 f + y_3 f^2 - f^3 \; . \; . \; . \; . \; . \; (f. 182)$$

womit die umgekehrte Operation f^{-1} in der direkten f ausgedrückt wird.

Schreibt man die zuletzt erhaltene Gleichung in die Form

$$y - y_1 f + y_2 f^2 - y_3 f^3 + f^4 = 0 \quad \ldots \quad (f.\ 183)$$

so kann gesagt werden, die Funktion f genüge einer biquadratischen symbolischen Gleichung.

Die vollständige Lösung der allgemeinen linearen Gleichung ist somit in dem Gleichungssystem (f. 182) (f. 176) (f. 170) (f. 154) (f. 41) (f. 34) enthalten.

173. Ein einfaches Beispiel möge wenigstens teilweise die vorhergehende Theorie erörtern. Es sei die Gleichung

$$aq + qb = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 184)$$

zur Auflösung vorgelegt.

Hierbei ist

$$fq = aq + qb,\ f1 = a + b,\ f'q = qa + bq,\ f'1 = a + b$$
$$c = S.(a+b),\ \varepsilon = V(a+b) = \varepsilon' \quad \ldots \quad (f.\ 185)$$

$$\begin{aligned}\Phi Vq = V.fVq &= V.[aVq + (Vq)b] = V.aVq + VqSb + V.VqVb \\ &= V.aVq + SbVq - V.VbVq \\ &= V.[aVq + (Sb - Vb)Vq] = V.(a + Kb)Vq\end{aligned}$$

$\Phi' Vq = V.(Ka + b)Vq$ nach Art. 140.

Es kommt nunmehr darauf an, die Gröszen x, x_1, x_2 zu berechnen nach (f. 34) (f. 41). Statt λ, μ, ν wollen wir $Va = \alpha$, $Vb = \beta$ und $V\alpha\beta$ wählen.

Es wird hiermit

$$\Phi'\lambda = V.(Ka+b)\alpha = V.(c - \alpha + \beta)\alpha = c\alpha - V\alpha\beta$$
$$\Phi'\mu = V.(Ka+b)\beta = V.(c - \alpha + \beta)\beta = c\beta - V\alpha\beta$$
$$\Phi'\nu = V.(Ka+b)V\alpha\beta = V.(c - \alpha + \beta)V\alpha\beta = (c - \alpha + \beta)V\alpha\beta,$$

weil

$$S.(c - \alpha + \beta)V\alpha\beta = S.(\beta - \alpha)V\alpha\beta = S.(\beta - \alpha)\alpha\beta = S\beta\alpha\beta = -S\alpha\beta^2 = 0.$$

Weiter erhält man

$$\begin{aligned}S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu &= S.(c\alpha - V\alpha\beta)(c\beta - V\alpha\beta)(c - \alpha + \beta)V\alpha\beta \\ &= c^3 S.\alpha\beta V\alpha\beta + c^2 S.[\alpha\beta(\beta - \alpha) - \alpha V\alpha\beta - (V\alpha\beta)\beta]V\alpha\beta \\ &\qquad - cS.[\{\alpha V\alpha\beta + (V\alpha\beta)\beta\}(\beta - \alpha) + NV\alpha\beta]V\alpha\beta \\ &\qquad - S.(\beta - \alpha)V\alpha\beta NV\alpha\beta \\ &= -c^3 NV\alpha\beta + c^2 S.\alpha\beta(\beta - \alpha)V\alpha\beta - \\ &\qquad - cS.\{\alpha V\alpha\beta + (V\alpha\beta)\beta\}(\beta - \alpha)V\alpha\beta\end{aligned}$$

$$= -c^3 NV\alpha\beta + cS.(\alpha-\beta)V\alpha\beta(\alpha-\beta)V\alpha\beta$$
$$= -c^3 NV\alpha\beta + cS.[(\alpha-\beta)V\alpha\beta]^2$$
$$= -c^3 NV\alpha\beta - cN.(\alpha-\beta)V\alpha\beta$$
$$= -c^3 NV\alpha\beta - cN(\alpha-\beta)NV\alpha\beta$$

Es ist noch

$$N(\alpha-\beta) = -(\alpha-\beta)^2 = -(Va-Vb)^2 = -[V(a-b)]^2 = NV(a-b)$$

und deshalb schlieszlich

$$S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu = -NV\alpha\beta[c^3 + cNV(a-b)].$$

Die Grösze

$$S.[\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu + \mu\Phi'\nu\Phi'\lambda + \nu\Phi'\lambda\Phi'\mu]$$

wird, indem die Faktoren der einzelnen Glieder umgetauscht werden, bis aus allen $V\alpha\beta$ als Faktor ausgenommen werden kann

$$= S.[\{2c\alpha\beta - \alpha V\alpha\beta(V\alpha\beta)\beta\}(c-\alpha+\beta) +$$
$$+ (c\alpha - V\alpha\beta)(c\beta - V\alpha\beta)]V\alpha\beta$$
$$= 3c^2 S.\alpha\beta V\alpha\beta - cS.[2\alpha V\alpha\beta + 2(V\alpha\beta)\beta + 2\alpha\beta(\alpha-\beta)]V\alpha\beta$$
$$+ S.[(V\alpha\beta)^2 - \{\alpha V\alpha\beta + (V\alpha\beta)\beta\}(\alpha-\beta)]V\alpha\beta$$
$$= -3c^2 NV\alpha\beta - S.[\alpha V\alpha\beta + (V\alpha\beta)\beta](\alpha-\beta)V\alpha\beta$$
$$= -3c^2 NV\alpha\beta + N(\alpha-\beta)NV\alpha\beta$$
$$= -NV\alpha\beta[3c^2 - NV(a-b)]$$

$$S.[\mu\nu\Phi'\lambda + \nu\lambda\Phi'\mu + \lambda\mu\Phi'\nu =$$
$$= S.[(c\alpha - V\alpha\beta)\beta + \alpha(c\beta - V\alpha\beta) + \alpha\beta(c-\alpha+\beta)]V\alpha\beta$$
$$= 3cS.\alpha\beta V\alpha\beta - S.[\alpha V\alpha\beta + (V\alpha\beta)\beta + \alpha\beta(\alpha-\beta)]V\alpha\beta$$
$$= -3cNV\alpha\beta$$

Somit ist

$$x = c^3 + cNV(a-b), \quad x_1 = 3c^2 - NV(a-b), \quad x_2 = 3c \quad (f.\ 186)$$

Wir können nun die Funktionen $\psi\varepsilon$, $\chi\varepsilon$ berechnen

$$\Phi\varepsilon = V.(a+Kb)\varepsilon = V.(a+Kb)V(a+b)$$
$$= V.(c+\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = c(\alpha+\beta) + \alpha\beta - \beta\alpha$$
$$= cV(a+b) + 2V.VaVb = 2Vab + S(a-b)V(a-b)$$
$$\Phi^2\varepsilon = V.(a+Kb)\ V\{(a+Kb)V(a+b)\}$$

Es sind nunmehr die Funktionen ψ, χ unmittelbar hinzuschreiben. Doch wollen wir auf die Mitteilung der Resultate verzichten, weil dieselben zu ausführlich werden.

Wir ersehen jedoch hieraus, wie mühsam die Lösung einer einfachen linearen Gleichung nach der allgemeinen Methode wird.

Es ist deshalb vorzuziehen nach einer besonderen Lösungsmethode umzusehen. Eine solche ist von HAMILTON für die in diesem Artikel betrachtete Gleichung mitgeteilt worden.

Wir gehen jetzt zu derselben über.

174. Es sei deshalb hier wieder die Gleichung (*f.* 184) oder

$$aq + qb = c$$

vorgelegt. Indem wir dieselbe einmal *mit Ka*, und auch *durch* b multipliciren, erhalten wir

$$Ka.aq + Ka.qb = Ka.c \text{ und } aqb + qb^2 = cb$$

Die erste dieser Gleichungen wollen wir zuerst umförmen. Es wird dadurch

$$qNa + Ka.qb = Ka.c$$

Die zweite lautet

$$qb^2 + aqb = cb.$$

Die Addition ergibt somit

$$q(Na + b^2) + 2qbSa = Ka.c + cb$$

$$q(Na + 2bSa + b^2) = Ka.c + cb$$

$$q = \frac{cb + Ka.c}{Na + 2bSa + b^2} \quad \dots\dots\dots (f. 187)$$

Als ein besonderer Fall sei gewählt $c = 0$. Schreiben wir nunmehr die gegebene Gleichung in die Gestalt

$$aq = qb \quad \dots\dots\dots\dots (f. 188)$$

so ist in dem vorigen Resultate auch b durch $-b$ zu ersetzen. Es wird sodann

$$q = \frac{Ka.c - cb}{Na - 2bSa + b^2}$$

und für $c = 0$ ergibt dies $q = 0$, ausgenommen wenn zugleich

$$Na - 2bSa + b^2 = 0. \quad \dots\dots\dots (f. 189)$$

Diesen Fall wollen wir weiter verfolgen. Aus (*f.* 188) schlieszt man

$$Taq = Tqb \text{ oder } Ta = Tb \quad \dots\dots (f. 190)$$

Die Gleichung (*f.* 189) kann demnach wie nachstehend geschrieben werden

$$Nb + b^2 - 2bSa = 0. \quad \dots\dots\dots (f. 191)$$

Nach den Gleichungen (*b.* 134) (*b.* 150) ist

$$Nb = Sb^2 - Vb^2 \text{ und } b^2 = Sb^2 + 2SbVb + Vb^2.$$

Deshalb ist

$$Nb + b^2 = 2Sb^2 + 2SbVb = 2bSb\,,$$

und die Gleichung (*f.* 191) ergibt nun

$$Sa = Sb \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\,192)$$

Weil

$$NVb = Nb - Sb^2 \text{ und } NVa = Na - Sa^2\,,$$

so kann aus (*f.* 190) (*f.* 192) geschlossen werden, dass auch

$$TVa = TVb$$

Wenn wir daher

$$UVa = \alpha\,,\; UVb = \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\,193)$$

setzen, so wird

$$Va = t\alpha\,,\; Vb = t\beta$$

sein, wo t der gemeinsame Tensor der Vektorteile von a und b bedeutet. Man kann somit setzen

$$a = a_0 + t\alpha\,,\; b = a_0 + t\beta$$

wo a_0 der gemeinsame Skalarteil der Quaternionen a, b ist, und wenn noch

$$q = w + \rho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\,194)$$

angenommen wird, wo $w = Sq$, $\rho = Vq$, so ist die Gleichung (*f.* 188) identisch mit der nachstehenden

$$(a_0 + t\alpha)(w + \rho) = (w + \rho)(a_0 + t\beta)$$

oder

$$w(\alpha - \beta) = \rho\beta - \alpha\rho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\,195)$$

Hiermit wird nun

$$Sw(\alpha - \beta)\rho = S(\rho\beta - \alpha\rho)\rho = S\rho\beta\rho - S\alpha\rho^2 = - S\beta\rho^2 - S\alpha\rho^2 = 0.$$

Deshalb muss $\rho \perp \alpha - \beta$ sein; wenn γ ein willkürlicher Vektor ist, so kann daher gesetzt werden

$$\rho = V\gamma(\alpha - \beta)$$

und hierdurch geht (*f.* 195) über in

$$w(\alpha - \beta) = [V\gamma(\alpha - \beta)]\beta - \alpha V\gamma(\alpha - \beta)$$

Indem auf beide Seiten mit V operirt wird, entsteht

$$\begin{aligned} w(\alpha - \beta) &= - V.\beta V\gamma(\alpha - \beta) - V.\alpha V\gamma(\alpha - \beta) = - V.(\alpha + \beta) V\gamma(\alpha - \beta) \\ &= -(\alpha - \beta)S(\alpha + \beta)\gamma + \gamma S(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ &= -(\alpha - \beta)S(\alpha + \beta)\gamma + \gamma S(\alpha^2 - \beta^2 - 2V\alpha\beta) \\ &= -(\alpha - \beta)S(\alpha + \beta)\gamma + \gamma(\alpha^2 - \beta^2) \\ &= -(\alpha - \beta)S(\alpha + \beta)\gamma - \gamma(T\alpha^2 - T\beta^2) \end{aligned}$$

Weil jedoch α und β Einheitsvektoren sind, verschwindet das letzte Glied und man erhält

$$w = - S(\alpha + \beta)\gamma$$

Nach ($f.$ 194 ist somit

$$q = - S(\alpha + \beta)\gamma + V\gamma(\alpha - \beta)$$
$$= - S\alpha\gamma - S\beta\gamma - V\alpha\gamma + V\beta\gamma$$
$$= - \alpha\gamma - K\beta\gamma = - \alpha\gamma - \gamma\beta.$$

Weil γ willkürlich war, kann daher auch gesetzt werden

$$q = \alpha\gamma + \gamma\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 196)$$

Ein zweiter besonderer Fall ist derjenige, wo b der Negative des Quaternions a ist, wo deshalb die erste Seite der gegebenen Gleichung die Gestalt $aq - qa$ hat. Wir können sodann unmittelbar die zweite der Gleichungen ($b.$ 152) anwenden, nach welcher gesetzt werden kann

$$aq - qa = 2V.VaVq$$

Die erste Seite der vorgelegten Gleichung ist somit ein rechter Quotient. Dasselbe musz somit auch mit der zweiten Seite der Fall sein. Wir schreiben daher die gegebene Gleichung in die Form

$$aq - qa = 2\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 197)$$

oder

$$V.VaVq = \beta. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 198)$$

Es ist dies die mit ($f.$ 73) bezeichnete Gleichung, deren Lösung nach ($f.$ 74) lautet

$$Vq = (Va)^{-1}(x + \beta)$$

wenn x ein willkürlicher Skalar ist. Die vorgelegte Gleichung ($f.$ 197) lässt den Skalarteil des unbekannten Quaternions unbestimmt. Die vollständige Lösung wird demnach sein

$$q = y + (Va)^{-1}(x + \beta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 199)$$

und dieselbe enthält zwei willkürliche Skalare.

175. Es gibt einige Gleichungen anderer Form als die im vorigen Artikel betrachtete lineare Gleichung, welche zu derselben zurückgeführt werden können. Wir wollen einige hier anführen

1°.
$$a'qb' + c'qd' = e' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 200)$$

Denn wenn man mit c'^{-1} und durch b'^{-1} multiplicirt, so entsteht

$$c'^{-1}a'q + qd'b'^{-1} = c'^{-1}e'b'^{-1}$$

in der man $c'^{-1}a' = a$, $d'b'^{-1} = b$, $c'^{-1}e'b'^{-1} = c$ setzen kann.

2°. $q^2 = aq + qb$ . . . . (f. 201)

Dieselbe multiplicire man mit q^{-1} und auch durch q^{-1}; es wird erhalten

$$1 = q^{-1}a + bq^{-1}$$

worin $q^{-1} = r$ gesetzt werde.

3°. $qcq = aq + qb$ . . . . (f. 202)

Dasselbe Verfahren wie bei der vorigen Gleichung angewandt, ergibt

$$c = q^{-1}a + bq^{-1}$$

somit

$$c = ra + br.$$

176. Der in diesem Abschnitte erörterte Stoff ermöglicht auch die Bestimmung der Differentiale weniger einfacher Funktionen, wie wir denselben schon im Artikel 117 begegnet sind. Denn wie aus jenem Artikel ersichtlich, erfordert die Bestimmung des Differentials der Funktion q^m, wenn m eine gebrochene Zahl ist, die Lösung einer Quaterniongleichung, in der das unbekannte Differential linear vorhanden ist.

Wir wollen in diesem Artikel eine der vorher erörterten Methoden dazu anwenden $d.q^{\frac{k}{l}}$ zu bestimmen, wo k, l ganze arithmetische Zahlen sind.

Zu dem Zwecke greifen wir zur Gleichung (e. 15) oder

$$q^{k-1}dq + q^{k-2}dq.q + \ldots + qdq.q^{k-2} + dq.q^{k-1} = r^{l-1}dr + r^{l-2}dr.r + \ldots + rdr.r^{l-2} + dr.r^{l-1}$$

zurück, wo

$$q^{\frac{k}{l}} = r$$

gesetzt ist.

Wenn wir diese Gleichung *mit* r^{-1} und zugleich *durch* r multipliciren, auszerdem aber die erste Seite der Gleichung mit Q bezeichnen, so erhalten wir

$$r^{-1}Qr = r^{l-2}dr.r + r^{l-3}dr.r^2 + \ldots + dr.r^{l-1} + r^{-1}dr.r^l$$

und die Subtraktion dieses Resultates von der Gleichung (e. 15) ergibt

$$Q - r^{-1}Qr = r^{l-1}dr - r^{-1}dr.r^l$$

und nach der Multiplikation *mit* r

$$r^l dr - dr.r^l = rQ - Qr \ldots\ldots (f.\ 203)$$

Es ist dies eine lineare Gleichung der im Art. 174 zuletzt betrachteten Form zur Bestimmung des gesuchten Differentials dr. Die zweite Seite der Gleichung ist nach der zweiten der Gleichungen (*b.* 152) ein Vektor, wie gefordert wird. Nach (*f.* 199) ist die Lösung nun unmittelbar hinzuschreiben, nämlich

$$dr = y + x(V.r^l)^{-1} + \tfrac{1}{2}(V.r^l)^{-1}(rQ - Qr). \quad (f.\ 204)$$

Dieser Wert des Differentials enthält jedoch zwei noch unbestimmte Skalare; es kann hieraus ersehen werden, dass die Überführung der Gleichung (*e.* 15) in die Form (*f.* 203) nicht den Nutzen gewährt, welchen dieselbe zuerst zu versprechen schien.

177. Den Wert der Skalare x, y zu bestimmen, tragen wir den gefundenen Ausdrück für dr in die Gleichung (*e.* 15) ein, welche dadurch eine identische werden musz. In dieser Weise wird erhalten

$$Q = lyr^{l-1} + x[r^{l-1}(V.r^l)^{-1} + r^{l-2}(V.r^l)^{-1}r + \ldots + r(V.r^l)^{-1}r^{l-2} +$$
$$+ (V.r^l)^{-1}r^{l-1}] + \tfrac{1}{2}[r^{l-1}Q_1 + r^{l-2}Q_1 r + \ldots + rQ_1 r^{l-2} + Q_1 r^{l-1}],$$

wo

$$Q_1 = (V.r^l)^{-1}(rQ - Qr)$$

gesetzt ist.

Wenn diese Gleichung mit einer willkürlichen Potenz von r, z. B. mit r^h, multiplicirt wird und die Skalarteile der beiden Seiten einander gleich gesetzt werden, so erhält man

$$S.r^hQ = lyS.r^{h+l-1} + lxS.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1} \quad . \quad . \quad (f.\ 205)$$

Denn es ist allgemein für jedes ganze a

$$S.r^{h+l-a}(V.r^l)^{-1}r^{a-1} = S.\{r^{h+l-a}(V.r^l)^{-1}\}r^{a-1}$$
$$= S.r^{a-1}\{r^{h+l-a}(V.r^l)^{-1}\} = S.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}$$

und in gleicher Weise

$$S.r^{h+l-a}Q_1 r^{a-1} = S.r^{h+l-1}Q_1$$
$$= S.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}(rQ - Qr) =$$
$$= S.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}rQ - S.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}Qr$$
$$= S.\{r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}r\}Q - S.\{r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}Q\}r$$
$$= S.\{rr^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}\}Q - S.r\{r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}Q\}$$

Die bei dem ersten Gliede angewandte Transformation ist erlaubt, weil

$$r^{h+l-1},\ (V.r^l)^{-1},\ r$$

complanare Quaternionen sind und das associative Princip bei der Multiplikation gültig ist. Es wird nun weiter

$$S.r^{h+l-a}Q_1 r^{a-1} = S.r^{h+l}(V.r^l)^{-1}Q - S.r^{h+l}(V.r^l)^{-1}Q = 0.$$

Die Gleichung (*f.* 205) setzt uns in den Stand, indem wir für h zwei specielle Werte wählen, auf einfache Weise die Constanten x, y zu bestimmen. Dabei soll noch beachtet werden, dass die erste Seite jener Gleichung leicht vereinfacht werden kan. Man erhält nämlich durch den soeben erörterten analoge Transformationen

$$S.r^h Q = kS.r^h q^{k-1} dq = kS.r^{h+\frac{k-1}{k}l} dq$$

und wenn dieser Wert in (*f.* 205) eingetragen wird

$$\frac{k}{l} S.r^{h+\frac{k-l}{k}l} dq = yS.r^{h+l-1} + xS.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1} \quad . \ (f.\ 206)$$

Setzt man hierin nun zuerst $h = 1 - l$, so wird erhalten

$$y = \frac{k}{l} S.r^{\frac{k-l}{k}} dq.$$

Die Einführung dieses Wertes in (*f.* 206) ergibt

$$\frac{l}{k} xS.r^{h+l-1} (V.r^l)^{-1} = S.r^{h+\frac{k-1}{k}} dq - (S.r^{h+l-1}) S.r^{\frac{k-l}{k}} dq$$

$$= S.r^{h+l-1} r^{\frac{k-l}{k}} dq - (S.r^{h+l-1}) S.r^{\frac{k-l}{k}} dq$$

$$= S.(V.r^{h+l-1})(V.r^{\frac{k-l}{k}} dq).$$

Nehmen wir weiter an $h = 1$, so wird erhalten

$$\frac{l}{k} xS.r^l (V.r^l)^{-1} = S.(V.r^l)(V.r^{\frac{k-l}{k}} dq)$$

und die erste Seite dieser Gleichung wird vereinfacht zu $\frac{l}{k} x$, weil

$$S.r^l(V.r^l)^{-1} = S.(S.r^l + V.r^l)(V.r^l)^{-1} = (S.r^l)S(V.r^l)^{-1} + 1 = 1,$$

weil $(V.r^l)^{-1}$ ein Vektor ist.

Somit ist schlieszlich:

$$dr = \frac{k}{l} S.q^{\frac{k-l}{k}} dq + \frac{k}{l}(V.q^k)^{-1} S.(V.q^k)(V.q^{\frac{k-l}{k}} dq) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(V.q^k)^{-1}(q^{\frac{k}{l}} Q - Q q^{\frac{k}{l}}) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (f.\ 207)$$

178. Es ist uns schon mehrmals der Fall begegnet, dass in

dem aus einer Quaterniongleichung aufgelösten Werte des Unbekannten eine willkürliche Grösze, Skalar oder Vektor, sich vorfindet. Der unbekannte Quaternion ist sodann durch die gegebene Gleichung nicht völlig bestimmt.

Wie in Art. 147—151 dargetan ist, ereignet dies in allen den Fällen, wo die Grösze x der allgemeinen HAMILTONschen Methode verschwindet.

Wenn wir die allgemeine Lösungsmethode mittelst der Reduction auf die viergliedrige Grundform anwenden, so wird der Fall der Unbestimmtheit eintreten, wenn wir nicht vier Skalargleichungen zur Bestimmung der Gröszen w, x, y, z erhalten oder wenn dieselben nicht unabhängig von einander sind.

Wir wollen noch einige Beispiele hinzufügen.

Die Gleichung $Sq = a$ ergibt $q = a + \rho$, wo ρ ein willkürlicher Vektor ist.

$Tq = a$ ergibt $q = a\,Ur$, wo r ein willkürlicher Quaternion ist.

Aus $Vaq = \beta$ schlieszt man

$$aq = x + \beta, \quad q = a^{-1}(x + \beta),$$

weil Saq unbestimmt geblieben ist.

Aus $V.\alpha Vq = \beta$ erfolgt

$$Vq = \alpha^{-1}(x + \beta),$$

wie schon in ($f.$ 74) gefunden; Sq kann noch willkürlich gewählt werden, somit wird

$$q = y + \alpha^{-1}(x + \beta)$$

die Lösung sein. Es kann der Gleichung nur genügt werden, wenn $S\alpha\beta = 0$.

179. Es sei zum Schlusse dieses Abschnittes die Lösung eines Systems simultaner linearen Quaterniongleichungen, dem man häufig begegnen wird, mitgeteilt. Es ist dieses System in ($f.$ 208) enthalten

$$S\alpha\rho = a, \quad S\beta\rho = b, \quad S\gamma\rho = c \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 208)$$

Dass die Lösung in der Tat eindeutig sein musz, ergibt sich folgendermaszen: Wären ρ_1, ρ_2 zwei dem Systeme genügende Vektoren, so hätte man

$$S\alpha\rho_1 = a, \quad S\alpha\rho_2 = a, \quad \text{somit} \quad S\alpha(\rho_1 - \rho_2) = 0,$$

und in gleicher Weise

$$S\beta(\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad S\gamma(\rho_1 - \rho_2) = 0.$$

Es wäre daher der Vektor $\rho_1 - \rho_2$ senkrecht zu den drei Vektoren α, β, γ, was offenbar unmöglich ist. Somit soll $\rho_1 - \rho_2$ verschwinden, oder $\rho_2 = \rho_1$.

Aus den beiden letzteren der Gleichungen ($f.$ 208) erfolgt

$$\gamma S\beta\rho - \beta S\beta\rho = b\gamma - c\beta$$

oder

$$V.\rho V\beta\gamma = b\gamma - c\beta \text{ nach } (e.\ 40)$$

In derselben Weise wird erhalten

$$V.\rho V\gamma\alpha = c\alpha - a\gamma$$

$$V.\rho V\alpha\beta = a\beta - b\alpha$$

somit

$$V.\rho(aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta) = 0.$$

Es soll deshalb ρ dem Vektor

$$aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta$$

parallel sein, sodass man setzen kann

$$\rho = x(aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta)$$

wenn x ein Skalar ist, dessen Wert wir näher bestimmen wollen. Es ist.

$$S.\alpha\rho = xS\alpha(aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta)$$

$$= xaS.\alpha V\beta\gamma + xbS.\alpha V\gamma\alpha + xcS.\alpha V\alpha\beta$$

worin die letzteren beiden Glieder verschwinden. Somit ist

$$S.\alpha\rho = xaS\alpha\beta\gamma\,;$$

nach ($f.$ 208) ist sodann aber auch

$$a = xaS\alpha\beta\gamma$$

$$x = \frac{1}{S\alpha\beta\gamma}.$$

Die gesuchte Lösung des Systems ist daher schlieszlich

$$\rho = \frac{aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta}{S.\alpha\beta\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 209)$$

Wenn nicht drei Gleichungen von der hier benutzten Form gegeben sind sondern nur zwei, so ist der Vektor ρ dadurch nicht ganz bestimmt.

Es sei gefragt die allgemeinste Lösung des Systems

$$S\alpha\rho = a\,, \quad S\beta\rho = b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 210)$$

zu finden.

Mit Leichtigkeit lässt sich daraus folgern

$$S.(b\alpha - a\beta)\rho = 0.$$

Dem Vektor ρ, welcher hiernach senkrecht zu $b\alpha - a\beta$ erscheint, kann daher die Form erteilt werden

$$\rho = V(b\alpha - a\beta)\gamma \quad \ldots\ldots\ldots (f.\ 211)$$

wo γ ein willkürlicher Vektor ist.

Statt γ kann stets gesetzt werden

$$\gamma = u\alpha + v\beta + wV\alpha\beta$$

wo u, v, w willkürlich veränderliche Skalare bedeuten. Die Substitution dieses Wertes in $(f.\ 211)$ ergibt

$$\rho = (bv + au)V\alpha\beta + wV.(b\alpha - a\beta)V\alpha\beta.$$

Ersetzt man noch $bv + au$ durch einen neuen Skalar x und bestimmt man den Wert des Skalars w durch die Substitution des für ρ erhaltenen Ausdrucks in $(f.\ 210)$, so wird schlieszlich

$$\rho = xV\alpha\beta + V\frac{a\beta - b\alpha}{V\alpha\beta} \quad \ldots\ldots (f.\ 212)$$

die allgemeinste Lösung jenes Gleichungssystems sein.

180. Die Ergebnisse des vorhergehenden Artikels gestatten noch eine wichtige Anwendung, die Auflösung der linearen Vektorgleichung nach einer neuen Methode, bei welcher einige bisher nicht erörterten Punkte der Theorie Erledigung finden.

Wenn gegeben ist

$$\Phi\rho = \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 213)$$

so leitet man hieraus unmittelbar die nachstehenden Beziehungen her

$$S.\lambda\Phi\rho = S.\lambda\delta,\ S.\mu\Phi\rho = S\mu\delta,\ S.\nu\Phi\rho = S\nu\delta \quad .. (f.\ 214)$$

wo λ, μ, ν drei willkürliche nicht complanare Vektoren bedeuten. Es ist sodann aber auch

$$S.\rho\Phi'\lambda = S\lambda\delta,\ S.\rho\Phi'\mu = S\mu\delta,\ S.\rho\Phi'\nu = S\nu\delta \quad .. (f.\ 215)$$

Wenn daher $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ nicht complanare Vektoren sind, so kann nach dem vorhergehenden Artikel hieraus geschlossen werden

$$\rho = \frac{S\lambda\delta.V\Phi'\mu\Phi'\nu + S\mu\delta.V\Phi'\nu\Phi'\lambda + S\nu\delta.V\Phi'\lambda\Phi'\mu}{S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu} \quad . (f.\ 216)$$

Es ist hierbei zu bemerken, dass der gefundene Wert Invariantencharakter besitzt, wie man auf dem im Art. 144 verzeichneten Wege dartut.

Eine specielle Wahl der Vektoren λ, μ, ν kann der Lösung öfters eine einfache Gestalt erteilen. Als Beispiel wollen wir

wieder die im Art. 154 schon gelöste Gleichung

$$V\alpha\rho\beta = \gamma$$

aufnehmen. Wählen wir auch hier für λ, μ, ν die Vektoren α, β, γ, so ist

$$\begin{aligned} V.\Phi'\mu\Phi'\nu &= \beta^2 V.\alpha\, V\alpha\gamma\beta \\ &= \beta^2 V.\alpha(\alpha\gamma\beta + S\alpha\beta\gamma) \\ &= \beta^2\alpha^2 V\gamma\beta + \alpha\beta^2 S\alpha\beta\gamma \\ V.\Phi'\nu\Phi'\lambda &= \alpha^2 V.(V\alpha\gamma\beta)\beta \\ &= \alpha^2 V.(\alpha\gamma\beta + S\alpha\beta\gamma)\beta \\ &= \alpha^2\beta^2 V\alpha\gamma + \beta\alpha^2 S\alpha\beta\gamma \\ V.\Phi'\lambda\Phi'\mu &= -\alpha^2\beta^2 V\alpha\beta. \end{aligned}$$

Daher wird nach (*f.* 216)

$$\rho = \frac{(\alpha^{-1}S\alpha\gamma + \beta^{-1}S\beta\gamma)S\alpha\beta\gamma - (S\alpha\gamma\, V\beta\gamma + S\beta\gamma\, V\gamma\alpha + \gamma^2 V\alpha\beta)}{S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma}$$

und dieser Wert geht mit Hülfe der Relation (*c.* 46), wenn man hierin ρ durch γ ersetzt, über in (*f.* 70).

Im allgemeinen kann keiner der Vektoren $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ verschwinden. Denn wäre dies z. B. mit $\Phi'\lambda$ der Fall, so hätte man, wenn unter ρ ein willkürlicher Vektor verstanden wird,

$$S.\rho\Phi'\lambda = 0 \text{ oder } S.\lambda\Phi\rho = 0,$$

eine Gleichung, welche erfordert, dass für alle Werte von ρ der Vektor $\Phi\rho$ senkrecht zu λ, d. h. dass die lineare Vektorfunktion keine willkürliche ist.

Wenn jedoch $\Phi'\lambda$ verschwinden möchte, so wird nach der ersten der Gleichungen (*f.* 215) auch weiter $S\lambda\delta$ der Null gleich kommen und der in (*f.* 216) gefundene Wert für ρ wird unbestimmt.

Übrigens kann dieser Wert in dem allgemeinen Falle durch eine passende Wahl der Vektoren λ, μ, ν in eine neue Form geraten. Sind σ, τ zwei beliebige Vektoren, so setze man

$$\mu = V\delta\sigma\,, \quad \nu = V\delta\tau$$

Die Substitution dieser Werte in (*f.* 216) ergibt

$$\rho = \frac{S\lambda\delta\, V(\Phi' V\delta\sigma.\Phi' V\delta\tau)}{S.\Phi'\lambda(\Phi' V\delta\sigma)(\Phi' V\delta\tau)} \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 217)$$

Diese Gleichung geht auch aus (*f.* 32), (*f.* 34) hervor, wenn man darin $V\lambda\mu$ durch δ, λ und μ durch zwei zu δ senkrechte Vektoren ersetzt und endlich noch ν in λ abändert.

181. Die Lösung ($f.$ 216) kann nicht mehr Anwendung finden, wenn die Relation

$$S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 218)$$

stattfindet. Es ist dies der schon in Art. 147—151 erörterte Fall, wo der Coefficient x, den wir im Art. 143 einführten, verschwindet.

Die Vektoren $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ sind in diesem Falle complanar. Man kann daher setzen

$$\Phi'\nu = a\Phi'\lambda + b\Phi'\mu$$

und die dritte der Gleichungen ($f.$ 215) musz deshalb aus den beiden andren hergeleitet werden können, sodass nur zwei unabhängige Relationen

$$S.\rho\Phi'\lambda = S\lambda\delta, \quad S.\rho\Phi'\mu = S\mu\delta. \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 219)$$

stattfinden.

Die allgemeinste Lösung dieses Gleichungssystems, somit auch der linearen Vektorgleichung in dem betrachteten Falle, ist nach ($f.$ 212)

$$\rho = xV.\Phi'\lambda\Phi'\mu + V\frac{\Phi'\mu.S\lambda\delta - \Phi'\lambda.S\mu\delta}{V.\Phi'\lambda'\Phi'\mu} \quad \ldots \quad (f.\ 220)$$

In diesem Falle kann der Umstand, dass einer der Vektoren $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$ verschwindet, eintreten und der für ρ angegebene Wert wird sodann unbestimmt. Wenn nämlich $\Phi'\lambda$ verschwindet, so erfordert dies nach ($f.$ 219), dass dasselbe mit $S\lambda\delta$ der Fall sei. Es muss somit λ senkrecht zu δ sein.

Bei der Wahl der Vektoren λ, μ werde dies wieder beachtet.

Wir wollen diese Resultate dazu verwenden die früher schon gelöste Gleichung

$$V\alpha\rho = \gamma$$

einer neuen Betrachtung zu unterwerfen. Die Gleichung erfordert

$$S\alpha\gamma = 0.$$

Für λ können wir nun nicht den Vektor α wählen, weil sodann $\Phi'\lambda$ verschwände. Lassen wir λ, μ ganz willkürlich, so ist nach ($f.$ 220)

$$\rho = xV.V\alpha\lambda V\alpha\mu - V\frac{S\lambda\gamma V\alpha\mu + S\mu\gamma V\lambda\alpha}{V.V\alpha\lambda V\alpha\mu}$$

$$= x\alpha S\alpha\mu\lambda - V\frac{\gamma S\alpha\mu\lambda + S\alpha\gamma V\lambda\mu}{\alpha S\alpha\mu\lambda}, \text{ nach } (c.\ 44)\ (c.\ 46)$$

$$= x\alpha^2 S\alpha\mu\lambda.\alpha^{-1} - V\frac{\gamma}{\alpha}, \text{ weil } S\alpha\gamma = 0$$
$$= \alpha^{-1}(y + \gamma)$$

wie im Art. 154 gefunden ist.

182. Die erhaltenen Resultate setzen uns auch in den Stand die Gleichung

$$\Phi\pi = 0,$$

welcher wir im Art. 149 begegneten, allgemein zu lösen.

Wenn $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ nicht complanar sind, so kann zu diesem Zwecke in (*f.* 216) δ der Null gleich gesetzt werden, wodurch wir finden, dass auch π verschwindet.

Ist dagegen die Bedingung (*f.* 218) erfüllt, so musz der Wert (*f.* 220) Anwendung finden und die Annahme $\delta = 0$ ergibt

$$\pi = x V.\Phi'\lambda\Phi'\mu$$

wo λ, μ willkürliche Vektoren bedeuten, welche jedoch nicht die Funktion Φ' der Null gleich machen [1]).

Wird z. B. die Lösung der Gleichung

$$V\alpha\pi\beta - \pi T\alpha\beta = 0$$

gesucht, bei welcher der Bedingung (*f.* 218) genügt wird, so wählen wir für λ, μ die Vektoren α, β bzhw. Hierdurch wird

$$\Phi'\lambda = \alpha^2\beta - \alpha T\alpha\beta, \quad \Phi'\mu = \alpha\beta^2 - \beta T\alpha\beta,$$
$$V.\Phi'\lambda\Phi'\mu = V.\alpha^2\beta^2(\alpha\beta + \beta\alpha) = 0.$$

Somit ist $\pi = 0$ die Lösung der vorgelegten Gleichung.

Schlieszlich sei noch die Lösung der Gleichung

$$\gamma_1 S\alpha_1\pi + \gamma_2 S\alpha_2\pi + \gamma_3 S\alpha_3\pi = 0$$

gefragt für den Fall, dass γ_1, γ_2, γ_3 complanar sind; es entspricht diese Bedingung der Forderung, dass der Coefficient x verschwindet.

---

1) Dieses Resultat hätte man auch in einer andren einfachen Weise erhalten können. Es wird die Lösung gesucht der Gleichung $\phi\rho = 0$ bei der Nebenbedingung

$$S.\phi'\lambda\phi'\mu\phi'\nu = 0.$$

Aus letzerer schlieszt man

$$S.(V.\phi'\lambda\phi'\mu)\phi'\nu = 0 \text{ oder } S.\nu\phi(V.\phi'\lambda\phi'\mu) = 0 \text{ nach } (f.\ 29).$$

Diese Gleichung musz für jeden Wert von ν erfüllt werden, was offenbar nur möglich ist, wenn man hat

$$\phi(V.\phi'\lambda\phi'\mu) = 0.$$

Somit ist $xV.\phi'\lambda\phi'\mu$ die Lösung der Gleichung $\phi\rho = 0$. Es ist dies ein mit (*f.* 52) ganz übereinstimmendes Resultat.

Hierbei ist

$$\Phi'\rho = \alpha_1 S\gamma_1\rho + \alpha_2 S\gamma_2\rho + \alpha_3 S\gamma_3\rho.$$

Nehme man für λ den Vektor $V\gamma_2\gamma_3$, so würde $\Phi'\lambda$ der Null gleich werden. Diese Wahl ist daher nicht gestattet.

Lässt man wieder λ, μ willkürlich, so wird leicht gefunden

$$V.\Phi'\lambda\Phi'\mu = -(V\alpha_2\alpha_3 S.V\gamma_2\gamma_3 V\lambda\mu + V\alpha_3\alpha_1 S.V\gamma_3\gamma_1 V\lambda\mu + + V\alpha_1\alpha_2 S.V\gamma_1\gamma_2 V\lambda\mu).$$

Wählt man nun erst λ, μ derart, dass

$$V\lambda\mu = UV\gamma_2\gamma_3 = UV\gamma_3\gamma_1 = UV\gamma_1\gamma_2$$

und beachtet man, dass

$$S.V\gamma_3\gamma_3 UV\gamma_2\gamma_3 = S.TV\gamma_2\gamma_3(UV\gamma_2\gamma_3)^2 = -TV\gamma_2\gamma_3$$

so ergibt sich schlieszlich

$$\pi = x(TV\gamma_2\gamma_3 . V\alpha_2\alpha_3 + TV\gamma_3\gamma_1 . V\alpha_3\alpha_1 + TV\gamma_1\gamma_2 . V\alpha_1\alpha_2) \quad (f. 221)$$

als die gesuchte Lösung.

Hierbei ist angenommen, dass die in den Quaternionen $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$ enthaltenen Drehungen den nämlichen Sinn haben.

183. Zum Schlusse sei noch die Lösung der linearen Vektorgleichung erörtert, wenn die lineare Vektorfunktion in der dreigliedrigen Grundform gegeben ist:

$$\gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho + \gamma_3 S\alpha_3\rho = \delta \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f. 222)$$

Die Operation mit $S.\gamma_2\gamma_3$ an die beiden Seiten dieser Gleichung ergibt

$$S\alpha_1\rho = \frac{S\gamma_2\gamma_3\delta}{S\gamma_1\gamma_2\gamma_3}.$$

In gleicher Weise wird durch die Operation mit $S.\gamma_3\gamma_1$ und mit $S.\gamma_1\gamma_2$ erhalten

$$S\alpha_2\rho = \frac{S\gamma_3\gamma_1\delta}{S\gamma_1\gamma_2\gamma_3}, \quad S\alpha_3\rho = \frac{S\gamma_1\gamma_2\delta}{S\gamma_1\gamma_2\gamma_3};$$

nach (*f.* 209) ist daher

$$\rho = \frac{S\gamma_2\gamma_3\delta\, V\alpha_2\alpha_3 + S\gamma_3\gamma_1\delta\, V\alpha_3\alpha_1 + S\gamma_1\gamma_2\delta\, V\alpha_1\alpha_2}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\, S\gamma_1\gamma_2\gamma_3} . \quad (f. 223)$$

Dieser Wert wird unbestimmt, falls γ_1, γ_2, γ_3 complanar sind, weil sodann auch δ, der Gleichung (*f.* 222) zufolge, in der Ebene jener Vektoren enthalten sein musz.

In diesem Falle kann der Vektorfunktion eine einfachere Gestalt erteilt werden. Denn bestimmt man nun den Vektor

π aus (f. 221), so kann man von den drei willkürlichen Vektoren α_1, α_2, α_3 ein paar z. B. α_1, α_2 derart wählen, dass

$$V\alpha_1\alpha_2 = \pi$$

und dadurch musz γ_3, welcher durch die Gleichung (f. 87) definirt wird, verschwinden, sodass die lineare Vektorfunktion die Form annimmt

$$\Phi\rho = \gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho.$$

QUATERNIONGLEICHUNGEN DES ZWEITEN UND HÖHEREN GRADES.

---

184. Wir betrachten zuerst Quaterniongleichungen, welche nur complanare Quaternionen enthalten und deshalb rein algebraischer Form sind.

Die einfachste hierher gehörige Gleichung ist:

$$q^n = Q \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (g. 1)$$

wo Q ein bekannter, q der unbekannte Quaternion ist.

Indem von den beiden Seiten die $\frac{1}{n}$-te Potenz genommen wird, wird die Lösung erhalten

$$q = Q^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{Q} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (g. 2)$$

Denn die Bedeutung dieser Symbole ist nach Art. 74—77 bekannt. Es ist nämlich

$$\sqrt[n]{Q} = (TQ)^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{1}{n} \angle Q\right) + \sin\left(\frac{1}{n} \angle Q\right) . UVQ \right] \ldots \quad (g. 3)$$

185. Der Begriff der Wurzel eines Quaternions kann jedoch verallgemeinert werden, und es steht diese Verallgemeinerung in Verbindung mit einer analogen bei dem Begriffe des Quaternions selbst.

Bisher nahmen wir nämlich an, der Winkel eines Quaternions sei zwischen 0 und π enthalten. In den nachfolgenden Artikeln wollen wir diese Voraussetzung fallen lassen, indem wir festsetzen, dass zwei Quaternionen einander gleich genannt werden, wenn dieselbe, bei derselben Achse und demselben

Tensor, Winkel haben, welche um ein Vielfaches der Grösze 2π verschieden sind. Wenn somit

$$q = Tq(\cos\angle q + \sin\angle q . UVq)$$

gesetzt wird, wo $\angle q$ zwischen 0 und π enthalten ist, so soll ebenfalls gelten

$$q = Tq[\cos(\angle q + 2k\pi) + \sin(\angle q + 2k\pi) UVq] \quad . \; . \; (g.\,4)$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet.

Nach dieser Definition wird nun unmittelbar einleuchten, dass jede n^{te} Wurzel n gewöhnliche Quaternionwerte besitzt. Wenn man nämlich die Definition der n^{ten} Wurzel sich erinnert, welche durch die Gleichung ($g.$ 3) ausgesprochen wird, so wird klar, dass allgemeiner nunmehr geschrieben werden musz

$$\sqrt[n]{Q} = Q^{\frac{1}{n}} = (TQ)^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\angle Q + 2k\pi}{n} + \sin\frac{\angle Q + 2k\pi}{n} UVQ\right] \, . \; . \; (g.\,5)$$

wo k der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, ... $n - 1$ erhalten kann, weil der Wert der Wurzel für $k = n$ mit derjenigen für $k = 0$ nach ($g.$ 4) übereinstimmt.

Die neue Definion macht auch neue Namen notwendig. Nach Hamilton wollen wir als den Winkel eines Quaternions einfach den zwischen 0 und π enthaltenen Wert betrachten, und die Grösze $\angle Q + 2n\pi$, also jeden von dem Winkel um ein Vielfaches von 2π differirenden Winkel, die Amplitude des Quaternions nennen und mit $Am.q$ bezeichnen. Es gilt somit

$$Am.q = \angle q + 2k\pi, \; 0 < k < \infty \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (g.\,5^*)$$

186. Als erstes Beispiel sei gewählt die Bestimmung der vier Werte der Wurzel

$$q = \sqrt[4]{-1 + i.}$$

Setzen wir

$$-1 + i = Q = w + xi + yj + zk,$$

so ist

$$w = -1, \; x = 1, \; y = z = 0.$$

Nach ($b.$ 161), ($b.$ 164), ($b.$ 160) ist

$$TQ = \sqrt{2}, \; \cos\angle Q = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \text{ somit } \angle Q = \tfrac{3}{4}\pi, \; UVQ = i.$$

Die vier Werte sind daher enthalten in

$$q = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{4} + \sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{4}\right]$$

wenn der Reihe nach gesetzt wird: $k = 0, 1, 2, 3$.

Ein zweites Beispiel sei

$$\sqrt[6]{-\sqrt{3} + i + 2j + k}.$$

Setzen wir wieder

$$-\sqrt{3} + i + 2j + k = Q = w + xi + yj + zk,$$

somit

$$w = -\sqrt{3},\; x = z = 1,\; y = 2,$$

so wird nach den vorher genannten Formeln

$$TQ = 3,\; \cos\angle Q = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

somit

$$\angle Q = \pi - arc.\cos\frac{1}{\sqrt{3}},\; UVQ = \frac{i + 2j + k}{\sqrt{6}}$$

wo mit $arc.\cos\frac{1}{\sqrt{3}}$ der spitze Winkel gemeint ist.

Daher sind die sechs reellen Werte der vorgelegten Wurzel enthalten in:

$$q = \sqrt[6]{3}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi - arc.\cos\frac{1}{\sqrt{3}}}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{i + 2j + k}{\sqrt{6}}\sin\frac{(2k+1)\pi - arc.\cos\frac{1}{\sqrt{3}}}{6}\right]$$

wenn der Reihe nach $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ genommen wird.

187. Unsre nächsten Betrachtungen betreffen die allgemeinere Gleichung

$$q^n + q_1 q^{n-1} + q_2 q^{n-2} + \ldots + q_n = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (g.\,6)$$

in der $q_1, q_2, \ldots q_n$ complanar vorausgesetzt werden. Es ist dies eine Gleichung algebraischer Form, indem die Coefficienten mit dem unbekannten Quaternion umgetauscht werden können.

Hamilton hat gezeigt, dass diese Gleichung stets n gewöhnliche Quaternionwurzeln hat und nicht mehr. Natürlich können einige dieser Wurzeln einander gleich werden, wenn die Coefficienten $q_1, q_2 \ldots q_n$ besonderen Bedingungen genügen.

Im Folgenden ist der HAMILTONsche Beweis der Hauptsache nach wiederholt.

Unser Zweck sei zunächst zu zeigen, dass eine Gleichung von der Form

$$q(q-q')(q-q'')\ldots.(q-q^{(n-1)})=Q\ldots\ldots(g.\,7)$$

stets wenigstens eine gewöhnliche Quaternionwurzel hat, wenn q', $q''\ldots.q^{(n-1)}$ gewöhnliche complanare Quaternionen sind.

Einige dieser Gröszen können auch verschwinden; wir setzen voraus, dass dies bei den $(m-1)$ letzteren, wo

$$1 \overline{\overline{<}} m < n-1,$$

der Fall sei. Es reducirt sich dadurch die Gleichung (g. 7) zur nachstehenden

$$q^m(q-q')(q-q'')\ldots.(q-q^{(n-m)})=Q\ \ldots(g.\,8)$$

Wir bestimmen weiter eine Grösze q_0 derart, dass

$$Q=q_0{}^m q' q''\ldots.q^{(n-m)}\ldots\ldots\ldots(g.\,9)$$

Dadurch kann man auch (g. 8) in die Gestalt, mit (g. 9) bezeichnet, bringen

$$\left(\frac{q}{q_0}\right)^m\left(\frac{q}{q'}-1\right)\left(\frac{q}{q''}-1\right)\ldots.\left(\frac{q}{q^{(n-m)}}-1\right)=1\ .\ (g.\,10)$$

Wenn λ irgend ein Vektor in der gemeinschaftlichen Ebene der Quaternionen ist, so sei

$$q\lambda=\rho,\ q_0\lambda=\alpha_0,\ q'\lambda=\alpha',\ldots.q^{(n-m)}\lambda=\alpha^{(n-m)}\ .\ (g.\,11)$$

gesetzt, wo ρ, α_0, $\alpha'\ldots.\alpha^{(n-m)}$ Vektoren bedeuten.

Wir denken dieselben aus einem Punkte O der Ebene gezogen und nennen

$$\rho=\mathrm{OP},\ \alpha_0=\mathrm{OA}_0,\ \alpha'=\mathrm{OA}',\ldots.\alpha^{(n-m)}=\mathrm{OA}^{(n-m)}.$$

Die Gleichung (g. 10) wird mit diesen Voraussetsungen zur nachstehenden

$$\left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^m\left(\frac{\rho}{\alpha'}-1\right)\left(\frac{\rho}{\alpha''}-1\right)\ldots.\left(\frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}}-1\right)=1\ .\ (g.\,12)$$

oder

$$\left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^m\frac{\rho-\alpha'}{\alpha'}\,\frac{\rho-\alpha''}{\alpha''}\ldots.\frac{\rho-\alpha^{(n-m)}}{\alpha^{(n-m)}}=1\ldots(g.\,12^*)$$

und schlieszlich

$$\left(\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}_0}\right)^m\frac{\mathrm{A'P}}{\mathrm{OA'}}\,\frac{\mathrm{A''P}}{\mathrm{OA''}}\ldots.\frac{\mathrm{A}^{(n-m)}\mathrm{P}}{\mathrm{OA}^{(n-m)}}=1\ldots\ldots(g.\,13)$$

Die erste Seite der Gleichung (g. 12) setzt HAMILTON gleich

$\Phi(\rho)$. Es ist dies sodann ein Quaternion, dessen Wert der Gleichung zufolge die Einheit sein soll. Der Quaternion soll somit einen Vektor in seiner Ebene nicht ändern, somit soll $T\Phi(\rho) = 1$ und die durch den Quaternion bewirkte Drehung Null oder ein Vielfaches von 2π sein. Man erhält daher

$$T\Phi(\rho) = 1\,,\quad am.\,\Phi(\rho) = 2p\pi \quad \ldots\ldots\ldots (g.\,14)$$

Es kommt nunmehr darauf an, die diesen Gleichungen genügenden Werte von ρ zu bestimmen.

Die Punkte A_0, A', ... $A^{(n-m)}$, O sind als gegebene zu betrachten. Ziehen wir weiter durch O eine willkürliche Gerade OQ, auf der ρ abgetragen werden soll und bestimmen wir, welcher Wert des Tensors des Vektors $\Phi(\rho)$ mit dem gewählten Werte von ρ übereinstimmt. Oder in anderen Worten: Wenn der Endpunkt P des Vektors ρ längs OQ sich bewegt, so fragen wir, welche die Änderungen sind, welche die Länge des Vektors $\Phi(\rho)$ erfährt, oder endlich mit den Bezeichnungen des Quaternionen-calculs: Wenn $U\rho$ constant, $T\rho$ veränderlich ist, welche ist sodann der zugehörige Wert von $T\Phi(\rho)$. Nach der Gleichung ($g.\,12$) kann man in Verbindung mit ($b.\,47$) ($b.\,116$) schlieszen

$$N\Phi(\rho) = N\left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^m N\left(\frac{\rho}{\alpha'} - 1\right) N\left(\frac{\rho}{\alpha''} - 1\right) \ldots\ldots N\left(\frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}} - 1\right)$$

$$= N\left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^m \left(N\frac{\rho}{\alpha'} + 1 - 2\,S\frac{\rho}{\alpha'}\right)\left(N\frac{\rho}{\alpha''} + 1 - 2\,S\frac{\rho}{\alpha''}\right)\Big(\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\Big)\left(N\frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}} + 1 - 2\,S\,\frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}}\right)$$

oder

$$T\Phi(\rho) = T\left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^m \left(\frac{T\rho^2}{T\alpha'^2} + 1 - 2\,\frac{T\rho}{T\alpha'}\cos\angle\frac{\rho}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}}\Big(\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\Big)\left(\frac{T\rho^2}{\{T\alpha^{(n-m)}\}^2} + 1 - 2\,\frac{T\rho}{T\alpha^{(n-m)}}\cos\angle\frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (g.\,15)$$

Welchen Wert wir nun auch für $U\rho$ angenommen haben mögen, stets wird für $T\rho = 0$ auch $T\Phi(\rho)$ verschwinden, für $T(\rho) = \infty$ auch $T\Phi(\rho)$ ins Unendliche wachsen, wenn nämlich die gegebenen Punkte sämtlich in endlicher Entfernungvon O liegen.

Es musz somit auch für *jeden* Wert von $U\rho$ mindestens ein Wert von $T\rho$ gefunden werden können, welcher $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich macht. Diesen Wert von $T\rho$ — oder vielmehr, wenn

mehrere Werte von $T\rho$ gefunden werden können, die $T\Phi(\rho)$ den Wert 1 erteilen, nur den kleinsten dieser Werte — denken wir auf jeden durch O gehenden Strahl OQ, welcher längs $U\rho$ fällt, abgetragen und indem wir die Endpunkte P der so erhaltenen Vektoren verbinden, entsteht eine Curve, welche *geschlossen* sein musz. Denn wenn wir in den oben gefundenen Wert für $T\Phi(\rho)$ der Einfachheit wegen

$$T\rho = r,\ T\alpha_0 = a_0,\ T\alpha' = a', \ldots.\ T\alpha^{(n-m)} = a^{(n-m)}$$

$$\angle \frac{\rho}{\alpha'} = \angle \mathrm{POA}', \angle \frac{\rho}{\alpha''} = \angle \mathrm{POA}'', \ldots. \angle \frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}} = \angle \mathrm{POA}^{(n-m)}$$

setzen, so wird dieselbe

$$T\Phi(\rho) = \left(\frac{r}{a_0}\right)^m \left(\frac{r^2}{a'^2} + 1 - 2\frac{r}{a'} \cos \angle \mathrm{POA}'\right)^{\frac{1}{2}} \left(\ldots.\right.$$

$$\left.\ldots.\right)\left(\frac{r^2}{a^{(n-m)2}} + 1 - 2\,\frac{r}{a^{(n-m)}} \cos \angle \mathrm{POA}^{(n-m)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \ . \ (g.\ 16)$$

und es geht hieraus hervor:

1°. dass mit dem Werte von $U\rho$, d. h. mit dem Werte der Winkel POA′, POA″,.... der Wert von r, welcher $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich macht, sich ändern musz, sodass $T\rho$ als Funktion von $U\rho$ erscheint;

2°. dass wenn $am. U\rho$ mit 2π wächst, wodurch jeder der Winkel POA′, POA″,.... auch mit 2π wächst, $T\Phi(\rho)$ ungeändert bleibt. Derselbe Wert von $T\rho$, welcher bei einem bestimmten $U\rho$ die Grösze $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich machte, wird dasselbe somit bei einem $U\rho$ tun, dessen Amplitude um 2π von derjenigen des vorigen verschieden ist.

Aus dem letzteren Satze geht nun hervor, dass die durch den Endpunkt P beschriebene Curve eine geschlossene sein soll und nicht spiralartig verlaufen kann. HAMILTON bezeichnet dieselbe daher als ein Oval. Die Curve musz weiter den Punkt O einschlieszen, denn weil $T\rho$ stets positiv ist, so wird auf jeden durch O gehenden Strahl *in der Richtung des Strahles* ein Punkt der Curve liegen.

Wir wollen die Curve oder das Oval in einem speciellen Falle näher untersuchen. Es sei nämlich die Gleichung ($g.$ 12) eine quadratische in Bezug auf ρ, somit von der Form

$$\frac{\rho}{\alpha}\left(\frac{\rho}{\alpha'}-1\right)=1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (g.\,17)$$

Die Gleichung (g. 16) ergibt für diesen Fall

$$r^2[r^2+a'^2-2\,ra'\cos\angle\,\mathrm{POA}']=a_0^2a'^2.$$

Setzt man noch

$$\angle\,\mathrm{POA}'=\theta\,,$$

so ist deshalb

$$r^2(r^2+a'^2-2\,ra'\cos\theta)=a_0^2a'^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (g.\,18)$$

als die Gleichung des Ovals in Polarcoordinaten mit O als Pol und OA′ als polarer Achse zu betrachten, und es ist aus der analytischen Geometrie bekannt, dass diese Gleichung ein Cassinisches Oval darstellt.

In dem allgemeinen Falle gelten weiter die nachfolgenden Sätze:

1⁰. Jeder von O ausgehende Strahl trifft die Curve in einem einzigen Punkte.

2⁰. Die Curve kann keinen der Punkte $\mathrm{A}', \mathrm{A}'', \ldots \mathrm{A}^{(n-m)}$ enthalten.

Denn wenn in die Gleichung (g. 16) z. B.

$$r=a',\ \angle\,\mathrm{POA}'=0\,,\ \angle\,\mathrm{POA}''=\angle\,\mathrm{A}'\mathrm{OA}'',\ldots$$

gesetzt wird, so wird der Faktor der zweiten Seite dieser Gleichung:

$$\frac{r^2}{a'^2}+1-2\,\frac{r}{a'}\cos\angle\,\mathrm{POA}'$$

verschwinden, daher $T\Phi(\rho)$ der Null gleich werden, während nach unsrer Voraussetzung für jeden Punkt des Ovals $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich kommen musz.

Wir sind nun zu der Wissenschaft gelangt, dass $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich ist für jeden zu einem Punkte des Ovals gehörigen ρ. Es bleibt uns nur noch übrig zu zeigen, dass wenigstens für einen dieser Punkte $am.\ \Phi(\rho)=2p\pi$ werden musz. Zu diesem Zwecke denken wir, dass der Punkt P, der Endpunkt des Vektors ρ, dessen Tensorwert die Grösze $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich macht, das Oval entlang sich bewegt, sodass $am.\ \dfrac{\rho}{\alpha_0}$ oder $am.\ \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}_0}$ mit 2π wächst.

Nach der Definition der m^{ten} Potenz eines Quaternions wächst sodann $am. \left(\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA_0}}\right)^m$ mit $2m\pi$.

Bei $am. \frac{\mathrm{A'P}}{\mathrm{OA'}}$ (Formel g. 13) jedoch können zwei verscheidene Fälle eintreten. Wenn nämlich der Punkt A′ innerhalb des Ovals liegt (Fig. 63), so wird der Strahl A′P bei einem ganzen Umlaufe des Punktes P eine ganze Umdrehung 2π gemacht haben. Es ist somit in diesem Falle

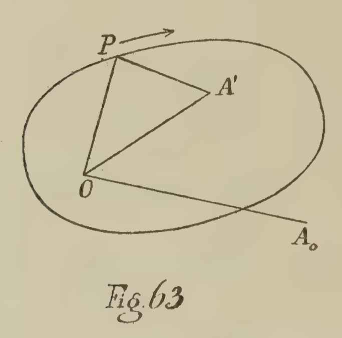


Fig. 63

$$am. (\mathrm{A'P} : \mathrm{OA'})$$

mit 2π gewachsen.

Wenn jedoch A′ auszerhalb des Ovals liegt, so wird der Strahl A′P, bei P anfangend, nach P_u (wenn $\mathrm{A'P}_u$ Tangente der Curve ist) sich drehen; sodann geht derselbe zurück bis nach $\mathrm{A'P}_i$ (die zweite Tangente der Curve aus A′), nachher bewegt sich A′P nochmals zurück nach $\mathrm{A'P}_u$, u. s. w.

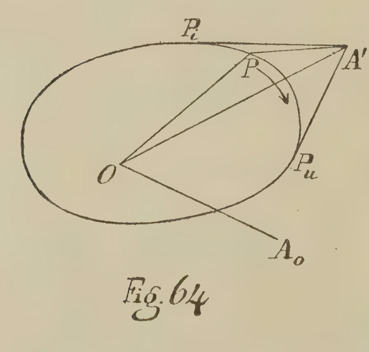


Fig. 64

Der Strahl A′P schwankt daher in diesem Falle hin und her; die Amplitude nimmt abwechselnd zu und ab. Nach einem Umlaufe des Punktes P hat daher die Amplitude des Quaternions A′P : OA′ den früheren Wert wieder erhalten.

Wenn t die Zahl der Punkte $\mathrm{A'}, \mathrm{A''}, \ldots \mathrm{A}^{(n-m)}$ ist, welche innerhalb des Ovals liegen, so ist nach dem Vorhergehenden $am.(\phi)\rho$ bei einem Umlaufe des Punktes P mit $(m+t)\,2\pi$ zugenommen. Hierin ist Eins der kleinste Wert von m, Null von t. Somit wächst $am.(\phi)\rho$ bei einem Umlaufe von P wenigstens mit 2π, und es soll daher auf dem Ovale wenigstens ein Punkt P liegen, fur den $am.\,(\phi)\rho$ den Wert 2π erhält.

Wir haben nun hiermit gezeigt, dass es wenigstens einen reellen Vektor ρ gibt, welcher den beiden Gleichungen (g. 14) zugleich genügt. Dieser Vektor ρ wird auch der Gleichung (g. 12), und der reelle Quaternion $q = \rho : \lambda$ wird der Gleichung (g. 10) oder (g. 7) Genüge leisten, und hiermit ist der am Anfang dieses Artikels ausgesprochene Hülfssatz bewiesen.

188. Der allgemeinere in Art. 187 ausgesprochene Satz kann aus dem Vorigen leicht gefolgert werden.

Wie in der Algebra kann nämlich bewiesen werden, dass wenn q_0 eine Wurzel einer Gleichung der betrachteten Art ist, deren zweite Seite verschwindet, die erste Seite $q - q_1$ als Faktor enthalten musz. Wir können nun wie nachstehend weiter schreiten.

Die Gleichung

$$q(q + q_1) = - q_2 \text{ oder } q(q + q_1) + q_2 = 0$$

hat nach dem vorigen Artikel stets eine reelle Wurzel q_1'. Die erste Seite wird demnach $q - q_1'$ als Faktor enthalten und der zweite Faktor sei $q - q_2'$. Man kan daher setzen

$$q(q + q_1) + q_2 = (q - q_1')(q - q_2') \quad \ldots\ldots \quad (g. 19)$$

Die Gleichung

$$q\{q(q + q_1) + q_2\} + q_3 = 0 \text{ oder } q\{q(q + q_1) + q_2\} = - q_3$$

oder endlich nach (g. 19)

$$q(q - q_1')(q - q_2') = - q_3$$

hat nach Art. 187 ebenfalls wenigstens eine reelle Wurzel q_1''. Indem $q - q_1''$ in

$$q\{q(q + q_1) + q_2\} + q_3$$

dividirt wird, erhält man eine quadratische Funktion als Quotient, der nach dem Vorigen in zwei Faktoren $(q - q_2'')(q - q_3'')$ gespalten werden kann. Es ist somit

$$q\{q(q + q_1) + q_2\} + q_3 = (q - q_1'')(q - q_2'')(q - q_3'') \,. \quad (g. 20)$$

In dieser Weise fortgehend erkennt man, dass die Form

$$q[q\{q(\ldots\{q(q + q_1) + q_2\}\ldots) + q_{n-2}\} + q_{n-1}] + q_n$$

oder

$$q^n + q_1 q^{n-1} + q_2 q^{n-2} + \ldots + q_{n-2} q^2 + q_{n-1} q + q_n = F_n(q)$$

stets n reelle Quaternionfaktoren der Form $q - q_1^{(n)}$ enthält, und nicht mehr als n.

Die Gleichung (g. 6), welche entsteht, indem die Form $F_n(q)$

der Null gleich gesetzt wird, hat somit stets n reelle Wurzeln und nicht mehr als n, welche erhalten werden, indem jeder der n reellen Faktoren der Null gleich gesetzt wird.

189. Die Wurzeln der Gleichungen algebraischer Form mit complanaren Quaternionen können wie die Wurzeln gewöhnlicher Skalargleichungen höheren Grades bestimmt werden. Es sei z. B. die Gleichung

$$q^2 + q_1 q + q_2 = 0, \quad q_1 \parallel\parallel q_2$$

vorgelegt mit der Aufgabe die beiden reellen, mit q_1, q_2 complanaren Wurzeln derselben zu bestimmen.

Die Gleichung lässt sich in die Form schreiben

$$\left(q + \frac{q_1}{2}\right)^2 + q_2 - \frac{q_1^2}{4} = 0$$

somit

$$q + \frac{q_1}{2} = \sqrt{\frac{q_1^2}{4} - q_2}$$

Die Wurzel der zweiten Seite dieser Gleichung hat zwei reelle Werte, welche nach Art. 185 bestimmt werden können. Hiermit ist das Problem gelöst.

190. Wir wollen weiter die vorher betrachtete Quaternionfunktion n^{ten} Grades

$$F_n(q) = q^n + q_1 q^{n-1} + q_2 q^{n-2} + \ldots + q_n$$

in eine andre Form bringen.

Ersetzt man nämlich in derselben nach (b. 136)

q durch $x + yUVq$, q_1 durch $x_1 + y_1 UVq$, u. s. w.

so ersieht man leicht, dass $F_n(q)$ die Form $X + YUVq$ annehmen wird, wo X, Y Skalarfunktionen n^{ten} Grades in Bezug auf x, y sind. Die Gleichung (g. 6) oder $F_n(q) = 0$ ist somit identisch mit

$$X + YUVq = 0$$

oder mit dem System

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (g. 22)$$

Aus diesen beiden Gleichungen müssen x, y bestimmt werden. Es sind sodann

$$Tq\cos \angle q, \quad Tq\sin \angle q$$

bekannt; somit ist der ganze Quaternion q bekannt.

Die Elimination einer der beiden Gröszen x, y zwischen den

Gleichungen (g. 22) ergibt für die andere dieser Gröszen eine Gleichung vom Grade n^2, wie die Algebra lehrt. Es werden somit den Gleichungen (g. 22) n^2 Wertsysteme für die Gröszen x, y genügen, und hierdurch werden auch n^2 Werte des unbekannten Quaternions q gefunden, welche der Gleichung (g. 6) genügen.

Nach dem vorigen Artikel sind n dieser Wurzeln reell, somit müssen $n^2 - n$ konisch spaltende Quaternionwurzeln der Gleichung (g. 6) bestehen. Dasselbe wird somit auch von jeder Gleichung von der Form (g. 1), welche in (g. 6) als besonderer Fall enthalten ist, gelten.

Die n^{te} Wurzel eines Quaternions hat demnach n reelle und $n^2 - n$ complexe Quaternionwurzeln.

191. Wenn bei einer willkürlichen Quaterniongleichung Tq mittelst der Relation

$$Tq^2 = Sq^2 - Vq^2$$

Uq mittelst der Relation

$$Uq = \frac{q}{Tq}$$

und die Wurzeln durch Potenzirung eliminirt werden, so nennen wir den Grad der erhaltenen Gleichung auch den Grad der ursprünglich vorhandenen.

192. Wenn in diesem Sinne eine Quaterniongleichung n^{ten} Grades vorliegt, so kann man, indem jeder der darin sich vorfindenden Quaternionen durch die viergliedrige Grundform ersetzt wird, daraus vier Skalargleichungen n^{ten} Grades in den Unbekannten w, x, y, z erhalten. Die Elimination dreier der Unbekannten führt auf eine Skalargleichung vom Grade n^4. Es werden deshalb n^4 Wertsysteme der Gröszen w, x, y, z gefunden, somit auch n^4 Werte des unbekannten Quaternions. Es gilt daher der Satz:

Einer Quaterniongleichung n^{ten} Grades genügen n^4 Lösungen.

Selbstverständlich können darunter gewöhnliche und konisch spaltende Quaternionen sich vorfinden.

Bisweilen können die vier erhaltenen Skalargleichungen nicht ausreichen zur Bestimmung der Unbekannten. Es können sodann unendlich viele Lösungen der Gleichung gefunden werden. Dies ereignet sich z. B. bei der Gleichung

$$q^2 = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (g.\ 23)$$

oder

$$q = \sqrt{-1},$$

wodurch ausgesagt wird, dass q ein rechter Radial ist, dessen Ebene jedoch ganz unbestimmt bleibt.

Es wird aus dem Vorigen erhellen, dass die Auflösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades ein sehr schwieriges Problem sein musz, weil dieselbe derjenigen einer Skalargleichung sechszehnten Grades gleich kommt. Wir wenden uns deshalb in den nächsten Artikeln der Auflösung einiger speciellen Gleichungen zu.

193. Von Hamilton ist eine allgemeine Auflösungsmethode der Gleichung

$$q^2 = qa + b \ldots\ldots\ldots\ldots (g.\ 24)$$

angegeben, die wir hier näher erörtern wollen.

Man setze

$$q = \tfrac{1}{2}(a + w + \rho) \ldots\ldots\ldots (g.\ 25)$$

wo w den Skalar-, ρ den Vektorteil des Quaternions $2q - a$ bedeutet.

Bei der Einführung dieses Wertes in die gegebene Gleichung wird erhalten:

$$\rho^2 + w^2 + 2w\rho + a\rho - \rho a - (a^2 + 4b) = 0 \ .\ .\ (g.\ 26)$$

Setzen wir weiter

$$Va = \alpha,\ S(a^2 + 4b) = c,\ V(a^2 + 4b) = 2\gamma \ .\ .\ (g.\ 27)$$

so sind die Gröszen c, α, γ als gegebene zu betrachten.

Weiter erhält man die Transformation

$$a\rho - \rho a = 2\, V\alpha\rho \text{ nach } (b.\ 152);$$

somit geht die Gleichung ($g.$ 26) über in die nachstehende

$$\rho^2 + w^2 - c + 2w\rho + 2\, V\alpha\rho - 2\gamma = 0 \ .\ .\ .\ (g.\ 28)$$

und hierbei musz der Skalar- und auch der Vektorteil der ersten Seite verschwinden. Die ursprünglich gegebene Gleichung ist daher aequivalent mit dem Gleichungssystem

$$\rho^2 + w^2 = c,\ w\rho + V\alpha\rho = \gamma \ldots\ldots (g.\ 29)$$

Die zweite dieser Gleichungen, oder

$$V.(w + \alpha)\rho = \gamma \ldots\ldots\ldots (g.\ 30)$$

ist eine lineare Vektorgleichung. Aus derselben kann ρ mittelst einer der allgemeinen Methoden gelöst und der erhaltene Aus-

druck nachher in die erste der Gleichungen (g. 29) substituirt werden behufs der Bestimmung des Skalars w. Auf kürzerem Wege jedoch kann man den Zweck, die Elimination des Vektors ρ, erreichen, indem man wie nachstehend verfährt.

Aus der Gleichung (g. 30) wird erhalten

$$S\alpha\gamma = S.\alpha V(w+\alpha)\rho = S.\alpha(w+\alpha)\rho = wS\alpha\rho$$

oder

$$S\alpha\rho = w^{-1}S\alpha\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (g.\ 31)$$

Addirt man dieses Resultat zur zweiten der Gleichungen (g. 29), so ergibt sich

$$w\rho + \alpha\rho = \gamma + w^{-1}S\alpha\gamma$$

und hieraus

$$\rho = (w+\alpha)^{-1}(\gamma + w^{-1}S\alpha\gamma) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (g.\ 32)$$

Demzufolge ist

$$\rho^2 = -N\rho = -\frac{N(\gamma + w^{-1}S\alpha\gamma)}{N(w+\alpha)} =$$

$$= -\frac{N\gamma + w^{-2}(S\alpha\gamma)^2}{N\alpha + w^2} = \frac{\gamma^2 - w^{-2}(S\alpha\gamma)^2}{w^2 - \alpha^2}.$$

Indem dieser Wert in die erste der Gleichungen (g. 29) eingesetzt wird, erhält man nach leichten Reduktionen

$$w^6 - w^4(c+\alpha^2) + w^2(c\alpha^2 + \gamma^2) - (S\alpha\gamma)^2 = 0 \quad . \quad (g.\ 33)$$

Es ist diese Gleichung als eine kubische Gleichung in Bezug auf w^2 zu betrachten; und es wird leicht bewiesen, dass die kubische Gleichung, besondere Fälle ausgenommen, stets eine positive und zwei negative Wurzeln hat.

Dass wenigstens eine der Wurzeln der kubischen Gleichung positiv ist, ergibt sich unmittelbar daraus, dass das constante Glied: $-(S\alpha\gamma)^2$, negativ ist. Dass die beiden anderen Wurzeln negativ sind, ist folgendermaszen zu ersehen.

Statt der Gleichung (g. 33) kann geschrieben werden:

$$(w^2 - \alpha^2)(w^4 - cw^2 + \gamma^2) + \alpha^2\gamma^2 - (S\alpha\gamma)^2 = 0$$

oder nach (c. 53)

$$(w^2 - \alpha^2)(w^4 - cw^2 + \gamma^2) - (V\alpha\gamma)^2 = 0 \quad . \; . \; . \quad (g.\ 34)$$

Der Ausdruck

$$w^4 - cw^2 + \gamma^2$$

verschwindet für zwei Werte von w^2, deren eine positiv, deren andere negativ ist, weil γ^2 seiner Bedeutung nach negativ ist.

Die beiden Wurzeln der Gleichung

$$w^4 - cw^2 + \gamma^2 = 0$$

wollen wir daher mit

$$-p_1^2, +p_2^2$$

bezeichnen. Es wird nunmehr, wenn die erste Seite der Gleichung (g. 34) mit F bezeichnet wird:

Für $w^2 = -\infty$, $F = -\infty$, deshalb $F < 0$.
Für $w^2 = -p_1^2$, $F = -(V\alpha\gamma)^2 = NV\alpha\gamma$, somit $F > 0$.
Für $w^2 = 0$, $F = -(S\alpha\gamma)^2$, somit $F < 0$.
Für $w^2 = p_2^2$, $F = -(V\alpha\gamma)^2 = NV\alpha\gamma$, somit $F > 0$.

Die kubische Gleichung in w^2 hat somit drei Wurzeln w_1, w_2, w_3, derart dass

$$-\infty < w_1 < -p_1^2 < w_2 < 0 < w_3 < p_2^2.$$

Es sind deshalb zwei Wurzeln negativ und eine positiv. Dies gilt von den Werten der Grösze w^2. Man ersieht deshalb, dass im allgemeinen w ein positiver und ein negativer Wert, deren absolute Gröszen übereinstimmen, zukommt und dass die vier anderen Werte imaginär sind. Für ρ und für $q = w + \rho$ werden demnach auch sechs Werte gefunden. Zwei der Werte des Quaternions q sind gewöhnliche Quaternionen, die vier übrigen dagegen konisch spaltende.

194. Ein Ausnahmefall besteht, wenn $S\alpha\gamma = 0$ oder wenn $\alpha \perp \gamma$.

Bei dieser Voraussetzung kann nämlich aus der Gleichung (g. 31) oder

$$w\, S\alpha\rho = S\alpha\gamma$$

geschlossen werden $w = 0$ oder $S\alpha\rho = 0$, und es lässt eine jede dieser Annahmen sich weiter verfolgen.

Wenn $w = 0$, so wird

$$\rho^2 = c \text{ und } V\alpha\rho = \gamma.$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen wird nach (f. 74) erhalten

$$\rho = \alpha^{-1}(x + \gamma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (g.\ 35)$$

wo x ein willkürlicher Skalar ist, dessen Wert sich jedoch in diesem Falle aus $\rho^2 = c$ bestimmen lässt. Denn es ist

$$\rho^2 = -N\rho = -\frac{N(x+\gamma)}{N\alpha} = -\frac{x^2 + N\gamma}{N\alpha} = \frac{x^2 - \gamma^2}{\alpha^2}$$

und es ergibt sich somit die Gleichung

$$\frac{x^2 - \gamma^2}{\alpha^2} = c$$

woher

$$x = \pm \sqrt{\gamma^2 + c\alpha^2}.$$

In (g. 35) eingesetzt ergeben sich daher durch die Annahme $w = 0$ die beiden Werte von ρ

$$\rho = \alpha^{-1}\{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + c\alpha^2}\} \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 36)$$

und hiermit

$$q = \tfrac{1}{2}[a + \alpha^{-1}\{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + c\alpha^2}\}] \quad \ldots. \quad (g.\ 37)$$

Wenn wir die zweite Annahme:

$$S\alpha\rho = 0\,,$$

weiter verfolgen, so können wir wie bei dem allgemeinen Falle fortschreiten und die Gleichung erhalten

$$w^4 - w^2(c + \alpha^2) + \gamma^2 + c\alpha^2 = 0 \quad \ldots. \quad (g.\ 38)$$

welche aus (g. 33) hervorgeht, wenn man darin $S\alpha\gamma = 0$ setzt und das Resultat durch w^2 dividirt. Der Wert von ρ in diesem Falle wird nach (g. 32);

$$\rho = (w + \alpha)^{-1}\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 39)$$

In Betreff der Realität der Wurzeln dieser Gleichung, können drei Fälle unterschieden werden:

1°. $\gamma^2 + c\alpha^2 > 0.$

Weil γ^2 und α^2 negativ sind, so erfordert diese Annahme zugleich $c < 0$. Es ist deshalb auch $c + \alpha^2$ negativ, und die beiden Wurzeln der Gleichung (g. 38) müssen somit negativ sein.

Aus (g. 37) erhält man in diesem Falle zwei gewöhnliche Quaternionwerte, aus (g. 38) vier konisch spaltende.

2°. $\gamma^2 + c\alpha^2 = 0,$

wobei auch gehört: c negativ. Es fällt die Gleichung (g. 38) nunmehr in

$$w^2 = 0,\ w^2 = c + \alpha^2$$

aus einander; der letztere Wert is negativ. Im Ganzen erhält man nun für q vier reelle Werte, nämlich viermal

$$q = \tfrac{1}{2}(a + \alpha^{-1}\gamma)$$

aus (g. 37) und weiter zwei complexe Werte.

3°. $\gamma^2 + c\alpha^2 < 0,$

wobei c positiv oder negativ sein kann; im letzteren Falle jedoch musz c grösser als $-\gamma^2 : \alpha^2$ sein.

Es wird demnach auch $c + \alpha^2$ positiv oder negativ sein können, und die Gleichung (g. 38) ergibt für w^2 stets eine positive und eine negative Wurzel. Somit sind zwei der Werte von w aus (g. 38) reell, zwei andre imaginär.

Zugleich werden die beiden Werte von q aus (g. 37) complex, sodass man zwei gewöhnliche und vier konisch spaltende Quaternionwurzeln erhält.

Fassen wir schlieszlich das Erörterte zusammen, so erhalten wir:

Die Gleichung $q^2 = qa + b$ hat, wenn a, b diplanare Quaternionen sind, stets zwei reelle und vier complexe Wurzeln, ausgenommen der Fall, wo

$$S.(a^2 + 4\,b)\,Va \quad \text{und} \quad NV(a^2 + 4\,b) - 4\,S(a^2 + 4\,b)NVa$$

zugleich verschwinden.

Bei diesen Annahmen hat die Gleichung vier reelle und zwei complexe Quaternionwurzeln.

195. Es sei das Vorige durch die Auflösung der Gleichung

$$q^2 = mqi + nj \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 40)$$

erörtert. Es wird hiebei

$$a = mi, \quad b = nj, \quad \alpha = mi, \quad c = S(-m^2 + 4\,nj) = -m^2,$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}V(-m^2 + 4\,nj) = 2\,nj.$$

Somit ist

$$S.\alpha\gamma = S.2\,mnij = 2\,mnSk = 0$$

und wir haben es mit dem im vorigen Artikel erörterten Fall zu tun. Berechnen wir noch die Grösze $\gamma^2 + c\alpha^2$. Es ist

$$\gamma^2 + c\alpha^2 = -4\,n^2 + m^4$$

und es sind deshalb wieder drei Fälle zu unterscheiden

1⁰. $$m^4 > 4\,n^2.$$

Wir erhalten sodann für die zwei mit (g. 37) bezeichneten Lösungen

$$q = \tfrac{1}{2}\left[mi - \frac{i}{m}\left\{2\,nj \pm \sqrt{m^4 - 4n^2}\right\}\right] = \tfrac{1}{2}\left[m \mp \frac{1}{m}\sqrt{m^4 - 4n^2}\right]i - \frac{n}{m}\,k.$$

Die Gleichung (g. 38) geht weiter über in:

$$w^4 + 2\,w^2m^2 + m^4 - 4n^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 41)$$

woraus

$$w^2 = - m^2 \pm 2n$$

sich folgern lässt. Setzen wir weiter voraus, m und n seien beide reelle Gröszen, so ist

$$m^2 - 2n > 0, \text{ wenn } n < 0.$$

Schreibt man jedoch

$$m^2 - 2n = \frac{m^4 - 4n^2}{m^2 + 2n},$$

so ersieht man hieraus, dass auch in dem Falle, wo

$$n > 0, \; m^2 - 2n$$

positiv sein musz.

In gleicher Weise ergibt sich, dass $m^2 + 2n$ stets positiv ist.

Somit sind die vier Werte

$$w = \pm \sqrt{-(m^2 \pm 2n)},$$

welche der Gleichung (g. 40) genügen, in diesem Falle stets imaginär, und die nach den Formeln (g. 39) (g. 25) berechneten Werte von q sind:

$$q = \tfrac{1}{2} m(i - k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-1} \cdot \sqrt{m^2 - 2n}\,(1 + j)$$
$$q = \tfrac{1}{2} m(i + k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-1}\, \sqrt{m^2 + 2n}\,(1 - j)$$

2⁰. $$m^4 = 4n^2.$$

Die vier gleichen Werte, welche q in diesem Falle hat, sind

$$q = \tfrac{1}{2} mi - \frac{n}{m} k.$$

Die beiden nicht verschwindenden Werte von w sind

$$w = \pm m \sqrt{-2}.$$

Hiermit findet man für q nach (g. 39) die beiden Quaternionen

$$q = \frac{m}{2} i + \frac{n}{m} k \pm \frac{m\sqrt{-2}}{2} \left(1 - \frac{2nj}{m^2}\right).$$

3⁰. $$m^4 < 4n^2.$$

Die beiden aus (g. 37) entstehenden Lösungen sind

$$\tfrac{1}{2} mi - \frac{n}{m} k \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-1}\, \frac{\sqrt{4n^2 - m^4}}{m} i.$$

In Bezug auf die zwei für w^2 aus (g. 41) gefundenen Werte

$$w^2 = - m^2 \pm 2n,$$

lässt sich zeigen, dass

für $n > 0$, $-m^2 + 2n$ positiv, $-m^2 - 2n$ negativ;
für $n < 0$, $-m^2 + 2n$ negativ, $-m^2 - 2n$ positiv sind.

Unterscheiden wir daher zwei Fälle, so erhalten wir, wenn $n > 0$, nach (g. 39) die reellen Werte

$$q = \tfrac{1}{2} m (i - k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{2n - m^2}\,(1 + j)$$

und die complexen Werte

$$q = \tfrac{1}{2} m (i + k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-1}\,\sqrt{2n + m^2}\,(1 - j).$$

Schlieszlich sind diese Werte in dem Falle $n < 0$:

$$q = \tfrac{1}{2} m (i - k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-1}\,\sqrt{m^2 - 2n}\,(1 + j),$$
$$q = \tfrac{1}{2} m (i + k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-(m^2 + 2n)}\,(1 - j).$$

196. Eine zweite Methode die Gleichung (g. 24) oder

$$q^2 = qa + b$$

aufzulösen, besteht in der Reduktion der sämtlichen vorhandenen Quaternionen auf die viergliedrige Grundform. Man setze

$$\left.\begin{aligned} q &= w + xi + yj + zk, \\ a &= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \\ b &= b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (g.\ 42)$$

vereinige das Resultat dieser Substitution zu einem Ausdruck der Form

$$W + Xi + Yj + Zk = 0$$

und setze sodann

$$W = 0,\ X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0.$$

Man erhält in dieser Weise das nachstehende Gleichungssystem:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a_1 x + a_2 y + a_3 z) = \tfrac{1}{4}(2w - a_0)^2 - \tfrac{1}{4} a_0^2 - b_0 \quad (g.\ 43)$$

$$\left.\begin{aligned} a_3 y - a_2 z &= (2w - a_0)x - (b_1 + a_1 w) \\ a_1 z - a_3 x &= (2w - a_0)y - (b_2 + a_2 w) \\ a_2 x - a_1 y &= (2w - a_0)z - (b_3 + a_3 w) \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (g.\ 44)$$

Wir führen im weiteren die kurzen Bezeichnungen ein:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = P,\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = Q,\ x^2 + y^2 + z^2 = R \quad (g.\ 45)$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = A,\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = B,\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = C \quad (g.\ 46)$$

Multiplicirt man nun die Gleichungen (g. 44) der Reihe nach mit x, y, z und auch mit a_1, a_2, a_3 und addirt jedesmal die erhaltenen Produkte, so werden die beiden nachstehenden Relationen erhalten:

$$(2w - a_0)R = (Q + Pw),\ (2w - a_0)P = (C + Aw). \quad (g.\ 47)$$

Werden dieselben Gleichungen (g. 44) quadratirt und nachher die Resultate addirt, so ergibt sich

$$AR - P^2 = (2w - a_0)^2 R + (B + 2\,Cw + Aw^2) - 2\,(2\,w - a_0)\,(Q + Pw) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g.\,48)$$

Endlich lautet die Gleichung ($g.$ 43) nach der Einführung der Gröszen P, R

$$R - P = \tfrac{1}{4}(2\,w - a_0)^2 - (\tfrac{1}{4}\,a_0^2 + b_0) \quad \ldots\ldots \quad (g.\,49)$$

Es lässt sich die Beziehung ($g.$ 48) mit Hülfe der ersten der Gleichungen ($g.$ 47) noch bedeutend vereinfachen. Man erhält

$$AR - P^2 = -(2\,w - a_0)^2\,R + (B + 2\,Cw + Aw^2). \quad (g.\,50)$$

Es sind nun in der zweiten der Gleichungen ($g.$ 47), in ($g.$ 49) ($g.$ 50) drei Gleichungen vorhanden, zwischen denen P, R eliminirt werden können. Setzen wir vorher noch

$$2\,w - a_0 = u. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\,51)$$

und führen wir überall u statt w ein, so wird durch die Elimination erhalten

$$u^6 - u^4\,(a_0^2 + 4b_0 - 2A) - u^2\,[2a_0\,(2C + Aa_0) + 4B + 4Ab_0 - A^2] - (2C + Aa_0)^2 = 0 \quad . \quad (g.\,52)$$

Diese Gleichung ergibt sechs Werte für u; nach ($g.$ 51) erhält man sodann auch sechs Werte für w und mittelst ($g.$ 44) werden die zugehörigen Werte für x, y, z bestimmt.

Dieses Resultat stimmt somit ganz mit dem nach der Hamiltonschen Methode erhaltenen.

Die Diskussion der Realität der Wurzeln der Gleichung ($g.$ 52) kann wie in Art. 193 stattfinden, indem man noch erwägt, dass dieselbe auch in die nachstehende Form geschrieben werden kann:

$$(u^2 + A)[u^4 + (A - a_0^2 - 4b_0)u^2 - (Aa_0^2 + 4a_0\,C + 4B)] + 4(AB - C^2) = 0,$$

während zugleich der Bedeutung nach

$$AB - C^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

und

$$Aa_0^2 + 4a_0 C + 4\,B = \frac{A^2 a_0^2 + 4a_0 AC + 4AB}{A} = \frac{(Aa_0 + 2C)^2 + 4(AB - C^2)}{A}$$

woraus sich ergibt, dass die beiden ersten Seiten der letzteren Gleichungen wesentlich positiv sind.

Der in Art. 194 betrachtete Ausnahmefall tritt hier ein, wenn

$$Aa_0 + 2C = 0 \;\text{ und zugleich }\; 4B + 4Ab_0 - A^2 = 0.$$

Doch wollen wir nicht näher hierauf eingehen, weil wir dadurch nur schon Bekanntes wiederholen würden.

Es könnte sogar nicht schwer fallen die völlige Übereinstimmung der Gleichungen (g. 52) (g. 33) nachzuweisen. Man beachte dabei, dass, wenn wir die Schreibweise des Artikels 193 anwenden,

$$\alpha^2 = - NVa = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \text{ nach } (b. 158) = -A$$

$$a^2 + 4b = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + 4b_0 + (2a_0a_1 + 4b_1)i + \\ + 2(a_0a_2 + 4b_2)j + 2(a_0a_3 + 4b_3)k \text{ nach } (b. 170)$$

somit

$$c = S(a^2 + 4b) = a_0^2 + 4b_0 - A$$

$$4\gamma^2 = - NV(a^2 + 4b) = -4[(a_0a_1 + 2b_1)^2 + (a_0a_2 + 2b_2)^2 + \\ + (a_0r_3 + 2b_3)^2]$$

oder

$$\gamma^2 = -(a_0^2A + 4a_0\,C + 4B) \text{ u. s. w.}$$

197. Wie die Gleichung (g. 24) kann auch die nachfolgende

$$q^2 = aq + b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 53)$$

aufgelöst werden. Indem man nämlich setzt

$$q = \tfrac{1}{2}(a + w + \rho) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 54)$$

erhält man hier das System der Gleichungen

$$\rho^2 + w^2 = c, \quad w\rho - V\alpha\rho = \gamma.$$

Die Elimination von ρ führt zu derselben Gleichung (g. 33) für w, und es wird weiter

$$\rho = (w - \alpha)^{-1}(\gamma - w^{-1}S\alpha\gamma) \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 55)$$

Ist eine Gleichung von der Form

$$q^2 = aq + qb + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 56)$$

vorgelegt, so transformire man dieselbe wie nachstehend

$$q^2 - aq - qb = c.$$

$$(q - a)^2 + qa - qb = a^2 + c.$$

$$(q - a)^2 + (q - a)(a - b) = a^2 - a(a - b) + c = ab + c.$$

Setzt man nunmehr

$$q - a = q', \; b - a = a', \; ab + c = b',$$

so ist die Gleichung (g. 56) übergegangen in

$$q'^2 = q'a' + b' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 57)$$

Zwei andere Gleichungen

$$qaq = qb + c, \; qaq = bq + c \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 58)$$

bieten auch keine Schierigkeiten. Denn man erhält, indem die erste *mit* a, die zweite *durch* a multiplicirt und

$$aq = q', \quad qa = q''$$

bzhw. gesetzt wird,

$$q'^2 = q'b + ac, \quad q''^2 = bq'' + ca \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 59)$$

Noch erwähnen wir

$$q^2a = qb + c, \quad aq^2 = bq + c$$

als Gleichungen, welche auf eine der vorhergehenden zurückgeführt werden können.

198. Eine neue Klasse der quadratischen Gleichungen wird durch die nachstehende

$$aq^2 = 2qb + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 60)$$

dargestellt. Die Auflösung derselben kann, wie wir noch zeigen wollen, nach der in Art. 196 angewandten Methode stattfinden.

Setzen wir wieder

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \\ q &= w + xi + yj + zk, \\ b &= b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, \\ c &= c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 61)$$

so führt die gegebene Gleichung zu dem mit (g. 62) (g. 63) bezeichneten System von Skalargleichungen, in welchem die Abkürzungen des Art. 196 angewandt sind:

$$a_0(w^2 - R) - 2b_0 w - c_0 = 2Pw - 2Q \quad \ldots \quad (g.\ 62)$$

$$\left.\begin{aligned} 2(b_3 + a_3 w)y - 2(b_2 + a_2 w)z &= a_1(w^2 - R) + \\ &\quad + 2(a_0 w - b_0)x - (2b_1 w + c_1) \\ 2(b_1 + a_1 w)z - 2(b_3 + a_3 w)x &= a_2(w^2 - R) + \\ &\quad + 2(a_0 w - b_0)y - (2b_2 w + c_2) \\ 2(b_2 + a_2 w)x - 2(b_1 + a_1 w)y &= a_3(w^2 - R) + \\ &\quad + 2(a_0 w - b_0)z - (2b_3 w + c_3) \end{aligned}\right\} \quad (g.\ 63)$$

Die drei letzteren Gleichungen geben zu drei anderen Anlass, indem dieselben nach einander zuerst mit x, y, z, sodann mit

$$b_1 + a_1 w, \quad b_2 + a_2 w, \quad b_3 + a_3 w,$$

multiplicirt und endlich auch quadratirt werden; während man jedesmal die drei erhaltenen Gleichungen addirt. Es entsteht in dieser Weise das Gleichungssystem

$$P(w^2 - R) + 2(a_0 w - b_0) R - (2Qw + S) = 0 \quad . \; . \quad (g.\ 64)$$

$$(C + Aw)(w^2 - R) + 2(a_0 w - b_0)(Q + Pw)$$
$$- \{2Cw^2 + (2B + D)w + E\} = 0 \quad . \; . \; (g. 65)$$

$$4R(B + 2Cw + Aw^2) - 4(Q + Pw)^2 = A(w^2 - R)^2 +$$
$$+ 4(a_0 w - b_0)^2 R + (F + 4Ew + 4Bw^2) + 4(w^2 - R)(a_0 w - b_0)P -$$
$$- 2(w^2 - R)(2Cw + D) - 4(a_0 w - b)(2Qw + S) \quad . \; . \; (g. 66)$$

worin noch die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} S &= c_1 x + c_2 y + c_3 z, \\ D &= a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3, \\ E &= b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3, \\ F &= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (g. 67)$$

angewandt sind.

Wir haben somit in (g. 62) (g. 64) (g. 65) (g. 66) vier Gleichungen erhalten mit fünf unbekannten Gröszen w, P, Q, R, S. Es ist jedoch unschwer eine fünfte Relation zu finden. Aus den in Bezug auf x, y, z linearen Gleichungen:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = P, \quad b_1 x + b_2 y + b_3 z = Q, \quad c_1 x + c_1 y + c_3 z = S$$

können x, y, z leicht aufgelöst werden, und die erhaltenen Werte in

$$x^2 + y^2 + z^2 = R$$

gesetzt, geben zur nachstehenden Gleichung Anlass

$$R \begin{vmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = P^2 A_1 + Q^2 B_1 + S^2 F_1 +$$
$$+ 2\, QSE_1 + 2\, SPD_1 + 2\, PQC_1 \quad . \; . \; (g. 68)$$

wenn A_1, B_1, ... die Unterdeterminanten der Elemente A, B, ... der in der ersten Seite dieser Gleichung sich vorfindenden Determinante sind. Dieses Resultat wird leicht nach einiger Rechnung erhalten.

Zwischen den fünf Gleichungen (g. 62) (g. 64) (g. 65) (g. 66) (g. 68) müssen nun die Gröszen P, Q, R, S eliminirt werden um eine Gleichung in w zu erhalten.

Indem man (g. 64) mit $(a_0 w - b_0)$ multiplicirt und das Resultat von (g. 66) subtrahirt, wird die letztere Gleichung vereinfacht, und man erhält

$$4R(B + 2Cw + Aw^2) - 4(Q + Pw)^2 = A(w^2 - R)^2 - 4(a_0 w - b_0)^2 R -$$
$$- 2(w^2 - R)(2Cw + D) + F + 4Ew + 4Bw^2 \quad . \; . \; (g. 69)$$

Die beiden Gleichungen (g. 62) (g. 64) gestatten P, Q linear

in R auszudrücken. Aus (g. 64) kann S als quadratische Funktion von R dargestellt werden.

Die Einführung dieser Werte in (g. 68) (g. 69) ergibt zwei Gleichungen in R, die eine zweiten, die andere vierten Grades, zwischen denen R nach bekannten Methoden eliminirt werden kann. Es ist demnach stets möglich eine Skalargleichung für w herzuleiten, doch sind die Resultate im allgemeinen zu umständlich um hier Platz finden zu können.

199. Eine einfache Gleichung jedoch möge nach der vorhergehenden Theorie aufgelöst werden. Es sei dazu gewählt

$$iq^2 = mqj + nk \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (g. 70)$$

wo m, n Zahlen bedeuten. Die Gleichungen, aus denen w, x, y, z nun bestimmt werden müssen, sind

$$\left.\begin{array}{c} mz = x^2 + y^2 + z^2 - w^2, \\ 2wx - my = 0, \; 2wz + wm = 0, \; 2wy - mx = n \end{array}\right\} . \quad (g. 71)$$

Die dritte dieser Gleichungen veranlasst die beiden nachfolgenden Voraussetzungen

1°. $$w = 0;$$

es wird sodann den übrigen Gleichungen (g. 71) zufolge

$$x = -\frac{n}{m}, \; y = 0, \; z^2 - mz + \frac{n^2}{m^2} = 0$$

oder

$$z = \frac{m}{2} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{m^4 - 4n^2}.$$

Somit werden zwei reelle Werte für den unbekannten Quaternion gefunden

$$q = -\frac{n}{m} i + \left\{ \frac{m}{2} \pm \frac{\sqrt{m^4 - 4n^2}}{2m} \right\} k$$

2°. $$z = -\frac{m}{2}.$$

Mit Hülfe der übrigen der Gleichungen (g. 71) wird gefunden

$$x = \frac{mn}{4w^2 - m^2}, \; y = \frac{2wn}{4w^2 - m^2},$$

und zur Bestimmung des Skalars w die Gleichung sechsten Grades

$$(4w^2 - m^2)^3 - 2m^2(4w^2 - m^2)^2 - 4n^2(4w^2 - m^2) - 8m^2n^2 = 0,$$

in der $4w^2 - m^2$ als Unbekannte betrachtet werden kann. Setzt man

$$4w^2 - m^2 = 2\xi,$$

so gilt es nun die Zeichen der Wurzeln der Gleichung

$$\xi^3 - m^2\xi^2 - n^2\xi - m^2n^2 = 0$$

zu bestimmen. Setzen wir voraus, m und n seien reelle Zahlen, so ist das letzte Glied der ersten Seite negativ; somit hat die Gleichung stets eine positive Wurzel. Weil aber nur *ein* Zeichenwechsel darin vorkommt, so kann die Gleichung auch nicht mehr als *eine* positive Wurzel haben.

Schreibt man die erste Seite der Gleichung für ξ in die Form

$$\xi^2(\xi - m^2) - n^2(\xi + m^2)$$

so erkennt man leicht, dass diese Funktion für alle Werte zwischen $\xi = 0$ und $\xi = -m^2 : 2$ negative Werte haben musz und deshalb das Zeichen nicht wechseln kann. Es kann die Gleichung für ξ daher keine Wurzel zwischen jenen Grenzen haben.

Der Grösze $4n^2 - m^2$ kommt somit stets nur ein einziger positiver Wert zu und kein negativer, welcher zwischen 0 und $-m^2$ enthalten ist. Für w werden deshalb auch stets nur zwei reelle und weiter vier complexe Werte gefunden.

Dasselbe wird sodann aber auch von dem Quaternion q gelten.

200. Die in Art. 198 erörterte Auflösung der Gleichung

$$aq^2 = qb + c$$

macht auch andere Quaterniongleichungen der Behandlung zugängig.

Es seien von denselben nur genannt

1⁰. $$q^2 = aqb + c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 72)$$

Denn man erhält hieraus

$$a^{-1}q^2 = qb + a^{-1}c,$$

eine Gleichung der Form (g. 60)

2⁰. $$qaq = bqc + d.$$

Denn man schlieszt hieraus zur nachstehenden

$$aqaq = aba^{-1}aqc + ad$$

oder

$$(aq)^2 = (aba^{-1})(aq)c + ad,$$

eine Gleichung der Form (g. 72).

201. Zum Schlusse dieser Arbeit sei noch einiges über die Gleichung

$$q^3 = qa + b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (g\ 73)$$

mitgeteilt. Die Einführung der viergliedrigen Grundform ergibt das System der Gleichungen:

$$w(w^2 - 3R) = a_0 w + b_0 - P \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (g.\ 74)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 y - a_2 z = (3w^2 - R - a_0)x - (b_1 + a_1 w) \\ a_1 z - a_3 x = (3w^2 - R - a_0)y - (b_2 + a_2 w) \\ a_2 x - a_1 y = (3w^2 - R - a_0)z - (b_3 + a_3 w) \end{array}\right\} \; . \; . \; . \quad (g.\ 75)$$

wenn die Abkürzungen der vorigen Artikel beibehalten sind.

Nach der vorher angewandten Methode leitet man aus dem System (g. 75) die drei andren Gleichungen her:

$$(3w^2 - R - a_0)P - (C + Aw) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (g.\ 76)$$

$$(3w^2 - R - a_0)R - (Q + Pw) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (g.\ 77)$$

$$AR - P^2 = (3w^2 - R - a_0)^2 R + (B + 2Cw + Aw^2) - \\ - 2(3w^2 - R - a_0)(Q + Pw)$$

deren letztere mit Hülfe der vorangehenden zur nachstehenden wird

$$AR - P^2 = B + 2Cw + Aw^2 - (3w^2 - R - a_0)^2 R \; . \; (g.\ 78)$$

Aus den Relationen (g. 74) (g. 76) (g. 78) können P, R leicht eliminirt werden, wodurch man eine Gleichung höheren Grades zur Bestimmung von w erhält, doch unterlassen wir die Mitteilung der ziemlich verwickelten Resultate.

Eine beträchtliche Vereinfachung tritt ein, wenn a ein Skalar, b ein Vektor ist. Denn man kann sodann in den vorigen Gleichungen setzen

$$b_0 = 0, \; P = 0, \; A = 0, \; C = 0.$$

Die Gleichung (g. 76) wird hiermit zu einer Identität, und (g. 74) (g. 78) gehen über in

$$\left.\begin{array}{r} w(w^2 - 3R - a_0) = 0 \\ B = (3w^2 - R - a_0)^2 R \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (g.\ 79)$$

Zur Bestimmung der Grösze w wird somit erhalten $w = 0$, oder

$$(2w^2 - a_0)^2 (w^2 - a_0) = \tfrac{27}{16} B$$

eine Gleichung sechsten Grades, welche leicht diskutirt wird.

Der Fall, wo a ein Skalar, b ein willkürlicher Quaternion ist, obgleich weniger einfach als der vorige, kann jedoch auch leicht verfolgt werden.

ANHANG.

POTENZEN MIT QUATERNIONEXPONENTEN, LOGARITHMEN UND TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN DER QUATERNIONEN.

---

202. Um zur allgemeinen Potenz eines Quaternions mit Quaternionexponenten zu geraten, setzen wir fest, dass das Symbol e^q, wo e die gewöhnliche Basis der nätürlichen Logarithmen bedeutet, wie in der Algebra nach aufsteigenden Potenzen von q entwickelt werden kann. Es ist somit durch diese Definition

$$e^q = 1 + q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{2.3} + \ldots + \frac{q^m}{2 \ldots m} + \ldots \quad (h.\ 1)$$

Wir wollen nun zuerst zeigen, dass die beiden Seiten dieser Gleichung einen völlig bestimmten Quaternion darstellen, dass somit die zweite Seite einer bestimmten Grenze sich nähert.

203. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\left.\begin{aligned} F(q) &= 1 + q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{2.3} + \ldots + \frac{q^m}{2 \ldots m} + \ldots \\ F_m(q) &= 1 + q + \frac{q^2}{2} + \ldots \frac{q^m}{2 \ldots m} \end{aligned}\right\} . \quad (h.\ 2)$$

sodass

$$F(q) = Lim.\ F_m(q), \text{ wenn } Lim.\ m = \infty.$$

Wir brauchen nur zu zeigen, dass

$$Lim.\ [F_{m+n}(q) - F_m(q)] = 0,$$

wenn $Lim.\ m = Lim.\ n = \infty$. Und dieses Resultat wird feststehen, sobald gezeigt ist, dass

$$Lim.\ T[F_{m+n}(q) - F_m(q)] = 0 \ldots\ldots (h.\ 3)$$

unter denselben Bedingungen stattfindet. Denn das Verschwinden des Tensors bedingt auch das Verschwinden des Quaternions.

204. Kehren wir zu der Gleichung ($b.$ 111) oder

$$N(q + q') = Nq + Nq' + 2TqTq' \cos \angle \frac{q}{q'}$$

zurück. Dieselbe lässt sich leicht umgestalten, wie nachstehend

$$T(q + q')^2 = (Tq - Tq')^2 + 2TqTq'\left(1 + \cos \angle \frac{q}{q'}\right)$$

$$= (Tq - Tq')^2 + 4TqTq' \cos^2 \tfrac{1}{2} \angle \frac{q}{q'}.$$

Weil nunmehr stets die Ungleichheit stattfindet

$$0 < \cos^2 \tfrac{1}{2} \angle \frac{q}{q'} < 1$$

so wird auch

$$Tq - Tq' < T(q + q') < Tq + Tq' \ldots\ldots (h.\ 4)$$

oder in Worten: der Tensor einer Summe von Quaternionen ist weniger als die Summe der Tensoren der einzelnen Glieder.

205. Wenn wir diese Ungleichheit anwenden, so ist

$$T[F_{m+n}(q) - F_m(q)] < F_{m+n}(Tq) - F_m(Tq) \ldots (h.\ 5)$$

Wählen wir nun einen ganzen Wert m_1, welcher der Ungleichheit genügt

$$m_1 > 2Tq - 1$$

so findet man leicht

$$\frac{Tq}{m_1 + 1} < \tfrac{1}{2}, \frac{Tq}{m_1 + 2} < \tfrac{1}{2}, \ldots, \frac{Tq}{m} < \tfrac{1}{2}, \text{ wenn noch } m > m_1.$$

Deshalb kann auch gesetzt werden:

$$\frac{Tq^m}{2 \ldots m} = \frac{Tq}{m} \frac{Tq}{m-1} \frac{Tq}{m-2} \cdots \frac{Tq}{m_1 + 2} \frac{Tq}{m_1 + 1} \frac{Tq^{m_1}}{2 \ldots m_1}$$

$$< (\tfrac{1}{2})^{m - m_1} \frac{Tq^{m_1}}{2 \ldots m_1}.$$

Wenn nun m_1 einen endlichen Wert hat, wie stets möglich

ist, so wird

$$\frac{Tq^{m_1}}{2\ldots m_1} = a$$

gesetzt werden können, wo a eine bestimmte endliche Zahl bedeutet.

Demnach wird stets, wenn $m > m_1$

$$\frac{Tq^m}{2\ldots m} < a\left(\tfrac{1}{2}\right)^{m-m_1} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (h.\,6)$$

Nun ist aber weiter:

$$F^{m+n}(Tq) - F_m(Tq) =$$

$$= \frac{Tq^{m+n}}{2\ldots(m+n)} + \frac{Tq^{m+n-1}}{2\ldots(m+n-1)} + \ldots + \frac{Tq^{m+1}}{2\ldots(m+1)}$$

$$= \left[\frac{Tq}{m+n}\,\frac{Tq}{m+n-1}\cdots\frac{Tq}{m+1} + \ldots + \frac{Tq}{m+2}\,\frac{Tq}{m+1} + \frac{Tq}{m+1}\right]\frac{Tq^m}{2\ldots m}$$

$$< \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\right]\frac{Tq^m}{2\ldots m},$$

wenn stets $m > m_1$ vorausgesetzt wird. Die zwischen Klammern stehende Reihe ist aber, falls n endlich bleibt, kleiner als Eins, und für $Lim.\, n = \infty$ nähert die Reihe sich der Einheit. Zieht man noch $(h.\,6)$ in Betracht, so wird somit stets die Ungleichheit gelten

$$F_{m+n}(Tq) - F_m(Tq) < a\left(\tfrac{1}{2}\right)^{m-m_1}.$$

Wenn nun m ins Unendliche wächst, so nähert die zweite Seite sich der Null; dasselbe soll somit mit der ersten stattfinden, weil diese auszerdem nicht negativ werden kann. Es wird deshalb

$$Lim.[F_{m+n}(Tq) - F_m(Tq)] = 0, \text{ wenn } Lim.\, m = \infty \text{ und } Lim.\, n = \infty \quad (h.\,7)$$

Dann musz aber auch nach $(h.\,5)$ die Gleichung stattfinden

$$Lim.\; T\,[F_{m+n}(q) - F_m(q)] = 0$$

womit unser Satz bewiesen ist.

206. Wir wollen nun weiter zeigen, dass allgemein

$$F(q)\,F(r) = F(q + r),$$

wenn q und r complanare Quaternionen bedeuten.

Betrachten wir zunächst die Funktion

$$P(q, r) = F_m(q)\,F_m(r) - F_m(q + r), \text{ wenn } q \,|||\, r \;\ldots\; (h.\,8)$$

Es ist

$$
\left.\begin{array}{l}
F_m(q)\,F_m(r) = \\
\left(1+q+\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{2.3}+\ldots+\frac{q^m}{2\ldots m}\right)\left(1+r+\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{2.3}+\ldots+\frac{r^m}{2\ldots m}\right) \\
= 1 + r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{2.3} + \ldots + \frac{r^m}{2\ldots m} \\
\quad + q + qr + \frac{qr^2}{2} + \ldots + \frac{qr^{m-1}}{2\ldots(m-1)} + \frac{qr^m}{2\ldots m} \\
\quad\quad + \frac{q^2}{2} + \frac{q^2 r}{2} + \ldots + \frac{q^2 r^{m-2}}{2.2\ldots(m-2)} + \frac{q^2 r^{m-1}}{2.2\ldots(m-1)} + \frac{q^2 r^m}{2.2\ldots m} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\quad\quad\quad\quad + \frac{q^m}{2\ldots m} + \frac{q^m r}{2\ldots m.2} + \ldots + \frac{q^m r^m}{2\ldots m.2\ldots m}
\end{array}\right\} (h.\,9)
$$

Die ersten $m+1$ Columnen bilden die Funktion

$$F_m(q+r),$$

wie leicht ersichtlich, und es ist somit $P(q, r)$ gleich der Summe der Glieder der übrigen Columnen. Nach $(h.\,4)$ ist sodann $TP(q, r)$ kleiner als die Summe der Tensoren dieser übrig bleibenden Glieder und diese Summe ist dem Ausdruck

$$F_m(Tq)\,F_m(Tr) - F_m(Tq + Tr)$$

gleich, wie unmittelbar einleuchtet, wenn man denselben hinschreibt.

Somit ist

$$TP(q, r) < F_m(Tq) F_m(Tr) - F_m(Tq + Tr)\;.\;.\;.\;(h.\,10)$$

Bilden wir noch die Funktion

$$F_{2m}(Tq + Tr)$$

oder

$$1 + (Tq + Tr) + \frac{(Tq + Tr)^2}{2} + \ldots + \frac{(Tq + Tr)^{2m}}{2\ldots 2m}$$

oder in andrer Schreibweise

$$
\begin{array}{l}
1 + Tr + \frac{Tr^2}{2} + \frac{Tr^3}{2.3} + \ldots + \frac{Tr^{2m}}{2\ldots 2m} \\
+ Tq + TqTr + \frac{TqTr^2}{2} + \ldots + \frac{TqTr^{2m-1}}{2\ldots(2m-1)} \\
\quad + \frac{Tq^2}{2} + \frac{Tq^2 Tr}{2} + \ldots + \frac{Tq^2 Tr^{2m-2}}{2.2\ldots(2m-2)}
\end{array}
$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \frac{Tq^{2m}}{2 \ldots 2m}$$

so erhellt unmittelbar, dass dieselbe alle Glieder der Funktion

$$F_m(Tq)\, F_m(Tr)\,,$$

— eines Ausdrucks, welcher aus (h. 9) hervorgeht, wenn man darin q, r durch Tq, Tr ersetzt — enthält und auszerdem noch andere Glieder.

Somit ist

$$F_{2m}(Tq + Tr) > F_m(Tq) F_m(Tr)$$

und die Ungleichheit (h. 10) ergibt a fortiori

$$TP(q, r) < F_{2m}(Tq + Tr) - F_m(Tq + Tr)$$

Nun musz aber nach (h. 7) die Gleichung stattfinden

$$Lim.\, TP(q, r) = 0, \text{ oder } Lim.\, T[F_m(q) F_m(r) - F_m(q + r)] = 0 \quad (h. 11)$$

wenn $Lim.\, m = \infty$, und hierdurch auch

$$Lim.\, [F_m(q)\, F_m(r) - F_m(q + r)] = 0$$

oder

$$F(q) F(r) = F(q + r) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (h. 12)$$

Weil aber $F(q)$ mit e^q identisch ist, so erhalten wir somit den Satz

$$e^q e^r = e^{q + r}, \text{ falls } q \,|||\, r \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (h. 13)$$

207. Weil der Skalar- und der Vektorteil eines Quaternions stets als complanar betrachtet werden können, so erhalten wir weiter nach (h. 13)

$$e^q = e^{Sq + Vq} = e^{Sq}\, e^{Vq} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (h. 14)$$

Der Ausdruck e^{Sq} ist seiner Bedeutung (h. 1) nach ein Skalar und aus der Algebra wissen wir, dass derselbe für alle Werte von Sq convergirt und einer positiven Zahl gleich kommt, welche gröszer oder kleiner als Eins ist, je nachdem Sq gröszer oder kleiner als die Null erscheint.

Der Ausdruck e^{Vq} kann leicht tranformirt werden

$$e^{Vq} = 1 + Vq + \frac{Vq^2}{2} + \frac{Vq^3}{2.3} + \ldots .$$
$$= 1 - \frac{(TVq)^2}{2} + \frac{(TVq)^4}{2.3.4} \ldots .$$
$$+ UVq \left[TVq - \frac{(TVq)^3}{2.3} + \frac{(TVq)^5}{2.3.4.5} \ldots . \right]$$

wenn noch beachtet wird, dass

$$(UVq)^2 = -1, \ (UVq)^4 = +1, \text{ u. s. w.}$$

Nach der Algebra kann dann weiter geschrieben werden

$$e^{Vq} = cos TVq + UVq.sin TVq \ \ldots\ldots \ (h. 15)$$

wo die Grösze des Winkels in der bekannten Weise gemessen ist durch die Länge des Bogens, von den Schenkeln des Winkels aus einem Einheitskreise ausgeschnitten.

In Verbindung mit der Gleichung (h. 14) erhalten wir schlieszlich

$$e^q = e^{Sq}\,(cos TVq + sin TVq.UVq) \ldots\ldots \ (h. 16)$$

und hieraus kann aufs neue erhellen, dass dem Symbol e^q ein bestimmter endlicher Wert zukommt. Man schlieszt weiter aus (h. 16)

$$T.e^q = e^{Sq},\ S.e^q = e^{Sq} cos TVq,\ V.e^q = e^{Sq} sin TVq.UVq \ . \ (h. 17)$$

208. Nehmen wir die Gleichung (h. 15) wieder auf, und schreiben dieselbe

$$e^{TVq.UVq} = cos TVq + sin TVq.UVq$$

so kann dieselbe verallgemeinert werden. Es ist nämlich TVq ein willkürlicher Skalar, den wir somit durch x ersetzen können, und es wird dann

$$e^{xUVq} = cos x + sin x UVq \ \ldots\ldots\ldots \ (h. 18)$$

analog der bekannten algebraischen Formel

$$e^{x\sqrt{-1}} = cos x + sin x.\ \sqrt{-1}$$

Nehmen wir in (h. 18) speciell $x = \angle q$, so ist

$$e^{\angle q.UVq} = cos \angle q + sin \angle q.UVq = Uq \ . \ . \ (h. 19)$$

Wenn wir jedoch den Quaternion in dem in Art. 184 erörterten Sinne auffassten, so hätten wir allgemeiner schreiben können

$$e^{am.q.UVq} = cos\ am.\ q + sin\ am.\ q.UVq = Uq \ . \ . \ (h. 20)$$

und hieraus geht hervor, dass die Funktion

$$Q = e^{am.q.UVq} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (h. 21)$$

eine periodische sein musz, indem dieselbe jedesmal denselben Wert erhält, wenn $am.\,q$ mit 2π wächst.

Es hat dies hierin seinen Grund, dass nach (h. 18)

$$e^{2\pi UVq} = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (h. 22)$$

sodass weiter nach (h. 13)

$$e^{(\angle q + 2\pi)UVq} = e^{\angle q.UVq}\, e^{2\pi UVq} = e^{\angle q.UVq}$$

Wenn $am. q$ mit π zunimmt, so ändert die Grösze Q das Zeichen, weil nach ($h.$ 18)

$$e^{\pi UVq} = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (h. 23)$$

209. Die Gleichung ($h.$ 20) wollen wir nun weiter benutzen den Logarithmus des Versors eines Quaternions zu definiren, wie nachstehend

$$log\ Uq = am\ q . UVq \ldots\ldots\ldots (h. 24)$$

Nehmen wir sodann noch an, dass auch die Gleichung

$$log\ q = log\ Tq + log\ Uq \ldots\ldots\ldots (h. 25)$$

gilt, so ist allgemein

$$log\ q = log\ Tq + am\ q . UVq \ldots\ldots\ldots (h. 26)$$

als die Definitionsgleichung des Quaternionlogarithmus zu betrachten. Dieselbe stimmt mit der bekannten Formel der Algebra für den allgemeinen Logarithmus einer Zahl überein. Denn, wenn q eine positive oder negative skalare Grösze ist, so ist die Ebene des Versors UVq unbestimmt und es musz somit diese Grösze durch $\sqrt{-1}$ ersetzt werden. Man erhält in dieser Weise, weil

für einen positiven Skalar $\angle q = 0$, $am. q = 2n\pi$,

und für einen negativen Skalar $\angle q = \pi$, $am. q = (2n+1)\pi$:

$$log\ x = lx + 2n\pi \sqrt{-1}, \text{ wenn } x > 0$$

$$log\ x = lx + (2n+1)\pi \sqrt{-1}, \text{ wenn } x < 0.$$

Es sind dies die bekannten algebraischen Formeln.

Die festgestellte Definition für $log\ q$ ergibt die Gleichung

$$e^{log\ q} = q \ldots\ldots\ldots\ldots (h. 27)$$

Denn es ist

$$e^{log\ q} = e^{log\ Tq + am\ q . UVq} = e^{log\ Tq}\ e^{am\ q . UVq} \text{ nach } (h. 13)$$

$$= Tq\,Uq \text{ nach } (h. 20) = q.$$

Es geht hieraus hervor, dass nur wenn $q \,|||\, r$, die Gleichung

$$log\ qr = log\ q + log\ r$$

stattfinden kann. Denn es ist sodann

$$qr = e^{log\ q}\ e^{log\ r} = e^{log\ q + log\ r} \text{ nach } (h. 13)$$

weil $log\ q$, $log\ r$ complanar sein müssen, sobald dasselbe bei q, r stattfindet.

210. Wir sind nun im Stande, allgemein q^r zu definiren. Es sei hierfür genommen

$$q^r = e^{r\ log\ q} \ldots\ldots\ldots\ldots (h. 28)$$

Es geht hieraus hervor, dass *nicht* stets

$$q^r q^s = q^{r+s}$$

sein kann. Denn es wird nur dann

$$q^r q^s = e^{r \log q} \, e^{s \log q} = e^{r \log q + s \log q} = e^{(r+s) \log q} = q^{r+s}$$

gültig sein, wenn $r \log q$, $s \log q$ complanare Quaternionen sind.

211. Den Sinus, Cosinus, Tangens eines Quaternions werden wir wie nachstehend erhalten

$$\left.\begin{aligned} 2 \sin q . UVq &= e^{qUVq} - e^{-qUVq} \\ 2 \cos q &= e^{qUVq} + e^{-qUVq} \\ tg q . UVq &= \frac{e^{qUVq} - e^{-qUVq}}{e^{qUVq} + e^{-qUVq}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (h. 29)$$

Aus diesen Formeln geht hervor, dass die beiden ersteren Gröszen stets convergiren. Mit Hülfe der Gleichung ($h.$ 1) und der Relation

$$(UVq)^2 = -1, \; (UVq)^4 = +1, \text{ u. s. w.}$$

beweist man leicht, dass auch die Gleichungen ($h.$ 30) gültig sind.

$$\left.\begin{aligned} \cos q &= 1 - \frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{2.3.4} - \frac{q^6}{2.3.4.5.6} + \ldots \\ \sin q &= q - \frac{q^3}{2.3} + \frac{q^5}{2.3.4.5} - \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (h. 30)$$

wie in der Algebra.

Eine dritte Form für die Funktionen $\cos q$, $\sin q$ kann wie nachstehend hergeleitet werden.

Durch die Anwendung der Gleichung ($h.$ 16) erhält man

$$\begin{aligned} 2 \cos q = {} & e^{S.qUVq} \{ \cos TV.qUVq + \sin TV(qUVq).UV(qUVq) \} \\ & + e^{S.-qUVq} \{ \cos TV.-qUVq + \sin TV(-qUVq).UV(-qVVq) \} \end{aligned}$$

Es ist jedoch

$$qUVq = (Sq + TVq.UVq)UVq = Sq.UVq - TVq$$

somit

$$S.qUVq = -TVq, \quad V.qUVq = Sq.UVq$$
$$TV.qUVq = \pm Sq, \quad UV.qUVq = \pm UVq$$

wo die oberen Zeichen gelten in dem Falle, wo

$$Sq > 0, \text{ oder } \angle q < \frac{\pi}{2},$$

die unteren, wenn

$$\angle q > \frac{\pi}{2}.$$

Die Einführung dieser Resultate in die erhaltene Gleichung ergibt für diese beiden Fälle

$$2\cos q = e^{-TVq}(\cos Sq + \sin Sq . UVq) + e^{TVq}(\cos Sq - \sin Sq . UVq)$$
$$= (e^{TVq} + e^{-TVq})\cos Sq - (e^{TVq} - e^{-TVq})\sin Sq . UVq$$
$$= 2\cos(\sqrt{-1}\, TVq)\cos Sq + 2\sqrt{-1}\,\sin(\sqrt{-1}\, TVq)\sin Sq . UVq$$

und zuletzt

$$\cos q = \cos(\sqrt{-1}\, TVq)\cos Sq + \sqrt{-1}\sin(\sqrt{-1}\, TVq)\sin Sq . UVq \quad (h.31)$$

In gleicher Weise wird erhalten

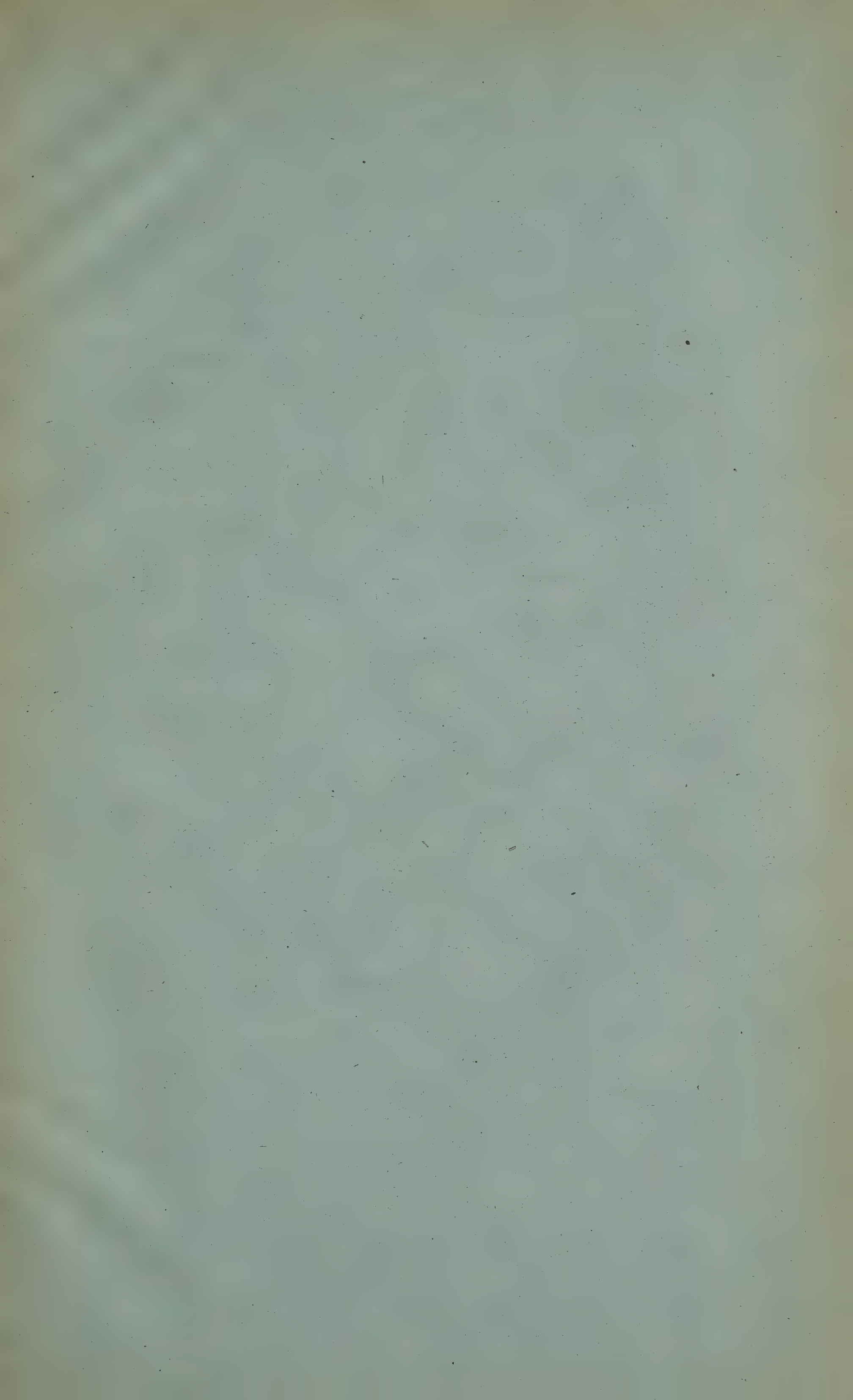
$$2\sin q\, UVq = e^{-TVq}(\cos Sq + \sin Sq . UVq) - e^{TVq}(\cos Sq - \sin Sq . UVq)$$
$$= -(e^{TVq} - e^{-TVq})\cos Sq + (e^{TVq} + e^{-TVq})\sin Sq . UVq$$
$$= 2\sqrt{-1}\sin(\sqrt{-1}\, TVq)\cos Sq + 2\cos(\sqrt{-1}\, TVq)\sin Sq . UVq$$

und schlieszlich

$$\sin q = \cos(\sqrt{-1}\, TVq)\sin Sq - \sqrt{-1}\sin(\sqrt{-1}\, TVq)\cos Sq . UVq \quad (h.\ 32)$$

BERICHTIGUNGEN.

Seite 14, Zeile 7 v. u. *lies:* denselben, *statt:* dasselbe.
» 15, » 17 v. o. *lies:* den, *statt:* das.
» 16, » 12 v. o. *lies:* der, *statt:* das.
» 39, » 20 v. o. *lies:* 67, *statt:* 71.
» 60, » 7 v. u. *lies:* Man sehe, *statt:* siehe.
» 72, » 6 v. u. *lies:* 69, *statt:* 67.



DRUCK VON E. J. BRILL, LEIDEN.

